

MATEMATIKA 10

II DALIS

2001

MATEMATIKA 10. II DALIS

LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli dešimtokai,
šį vadovėlį autorių kolektyvas rengė nuolat prisimindamas, kad po metų jūsų laukia nelengvas pasirinkimas, ko ir kaip toliau mokytis. Pagrindinės mokyklos programoje numatytą medžiagą buvo stengtasi papildyti pavyzdžiais, uždaviniais, o kai kada net atskirais skyreliais, kurie būtų naudingi jums, jeigu planuojate pasirinkti realinį profilį arba tiesiog norite sužinoti daugiau.
Vadovėlis susideda iš dviejų dalių (I dalis — 1–7 skyriai, II dalis — 8–9 skyriai ir kurso kartojimo medžiaga).
Pagrindinės mokyklos matematikos kurso nagrinėjimas baigiamas 8 skyriumi. Šio skyriaus struktūra įprastinė:

- Kiekviename skyrelyje pateikiama teorinė medžiaga. Neprivaloma teorinė medžiaga yra pateikta pilkame fone. Ji skirta temos pagilinimui. Teorijos skyreliuose nuspalvintas klaustukas žymi klausimus, į kuriuos turėtų atsakyti patys mokiniai.
- Kiekviename skyrelyje po teorinės medžiagos pateikiami uždaviniai ir pratimai, atitinkantys tame skyrelyje nagrinėtą medžiagą. Taip pat čia yra ir uždavinių, skirtų anksčiau nagrinėtai medžiagai pakartoti ir pagilinti. Uždavinių, atitinkančių neprivalomą medžiagą, numeriai yra nuspalvinti. Sunkesni uždaviniai pažymėti žvaigždute.
- Skyriaus gale yra skyrelis „Pasitikrinkite“. Šio skyrelio uždavinių atsakymai pateikti knygos gale.

9 skyrius „Tyrimo uždaviniai“ skirtas nagrinėti dalimis visus mokslo metus. Jame pateikti uždaviniai skirti loginiam mąstymui lavinti.
Toliau esanti medžiaga skirta kursui pakartoti. Ji susideda iš trijų dalių. Pirmoji dalis skirta algebrai, funkcijoms, statistikai, tikimybėms ir kombinatorikai, antroji dalis — geometrijai. Abiejų šių dalių struktūra yra vienoda:

- Įvadiniuose skyreliuose primenamos pagrindinės sąvokos ir žymenys.
- Kartojimo medžiaga pateikiama atskirais skyreliais. Kiekviename skyrelyje trumpai išdėstyti pagrindinės mokyklos matematikos teorijos pagrindai ir pateikiami tą medžiagą atitinkantys pratimai bei uždaviniai. Čia nerasite įrodymų ir medžiagos, kuri vadovėliuose buvo pateikiama kaip neprivaloma (pilkame fone).

Trečiojoje, kartojimo dalyje pateiktos užduotys, skirtos pasitikrinti, kaip įsisavintas pagrindinės mokyklos matematikos kursas.
Šį vadovėlį kūrė ne tik autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

***Irena Bagdonienė*, *Jolanta Knyvienė*, *Aleksandras Plikusas*, *Kazimieras Pulmonas*, *Juozas Šinkūnas*.**

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė*, *V. Bartkuvienė*, *K. Intienė*, *L. Jakštienė*, *V. Jankevičienė*, *R. Jonaitienė*, *A. Karmanova*, *S. Kavaliūnienė*, *R. Klasauskienė*, *N. Kriaučiūnienė*, *R. Kučiauskienė*, *D. Matienė*, *G. Mikalauskienė*, *L. Papuškienė*, *V. Sičiūnienė*, *S. Stakniene*, *V. Stoškuvienė*, *A. Šverienė*, *A. Ūsienė*, *V. Viniautienė*, *A. Žiulpa*.

MATEMATIKA 10

II DALIS

TEV

VILNIUS 2004

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2001 02 06 Nr. 78

Antrasis pataisytas leidimas

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak, Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Daiva Sniečkutė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–09–4 (2 dalis)
ISBN 9955–491–05–1 (2 dalys)

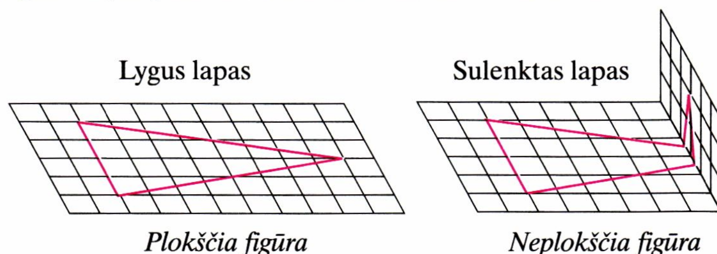
TURINYS

8 ERDVĖS GEOMETRIJA



1 Dviejų tiesių tarpusavio padėtis erdvėje. Kampas tarp prasilenkiančių tiesių

Planimetrijoje[1] nagrinėjamos figūros, esančios plokštumoje. Plokštumos figūros (trikampiai, keturkampiai, ..., apskritimai ir pan.) kartais vadinamos plokščiomis figūromis.
Stereometrijoje[2] nagrinėjamos plokščios figūros, esančios erdvėje, ir neplokščios figūros, pavyzdžiui, briaunainiai, sukiniai ir kt.



Plokščia figūra *Neplokščia figūra*

Paprasčiausios planimetrijos figūros yra taškas ir tiesė. Taškai žymimi didžiosiomis raidėmis A, B, C, ..., tiesės — mažosiomis a, b, c, ... (arba dviem didžiosiomis raidėmis).



Jei taškas A yra tiesėje a (priklauso tiesei a), tai rašome $A \in a$.
Jei taškas A nepriklauso tiesei a (tiesė a neina per tašką A), tai rašome $A \notin a$.

Stereometrijoje prie paprasčiausių planimetrijos figūrų prijungiama ir plokštuma. Plokštuma yra begalinė.
Plokštumą dažniausiai vaizduosime lygiagretainiu arba neapibrėžtos formos figūra ir žymėsime mažosiomis graikiškomis raidėmis α, β, γ, ...



Jei taškas A yra plokštumoje α, tai rašome $A \in \alpha$.
Jei taškas A nepriklauso plokštumai α, tai rašome $A \notin \alpha$.
Jei tiesė a yra plokštumoje α, tai rašome $a \subset \alpha$.
Jei tiesė a nepriklauso plokštumai α, tai rašome $a \not\subset \alpha$.

---

[1] Žodis „planimetrija“ sudarytas iš lotyniško žodžio *planum* — „paviršius, plokštuma“ ir graikiško žodžio *metreo* — „matuoju“.

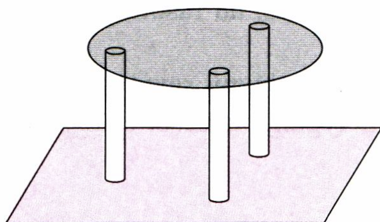
[2] Žodis „stereometrija“ sudarytas iš dviejų graikiškų žodžių *stereos* — „erdvinis“ ir *metreo* — „matuoju“.

Spręsdami uždavinius ar įrodinėdami teoremas remsimės akivaizdžiomis taškų, tiesių ir plokštumų savybėmis (aksiomomis):

1. *Per tris taškus, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma.*

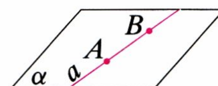


Remiantis šia savybe galima paaiškinti, kodėl stalas, turintis tris kojas, nesvyruoja.

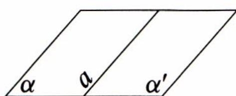


Plokštumą, nusakytą trimis taškais A, B ir C, galima žymėti ABC.

2. *Jeigu du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai visi tos tiesės taškai priklauso plokštumai* (*tiesė priklauso plokštumai*).
Jei $A, B \in a$ ir $A, B \in \alpha$, tai $a \subset \alpha$.

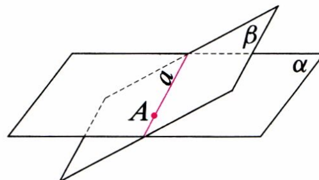


Tiesė, esanti plokštumoje, dalija plokštumą į dvi dalis — pusplokštumes.



Jei tiesė a yra plokštumoje α, tai gautas pusplokštumes žymėsime αa ir $\alpha' a$; tiesę a vadinsime tų pusplokštumių *kraštu*.

3. *Jeigu dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi ir bendrą tiesę, einančią per tą tašką; toje tiesėje yra visi bendrieji abiejų plokštumų taškai.*
Jei $A \in \alpha$ ir $A \in \beta$, tai yra tokia tiesė a, kad $a \subset \alpha$ ir $a \subset \beta$ ($A \in a$).

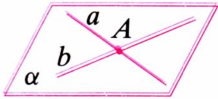


Panagrinėkime dviejų erdvės tiesių tarpusavio padėtį.

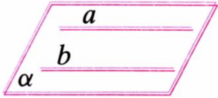


Kokia gali būti dviejų *plokštumos* tiesių tarpusavio padėtis?

Dvi erdvės tiesės *gali priklausyti vienai plokštumai*; tada jos gali kirstis arba būti lygiagrečios.



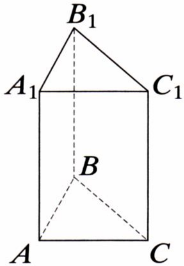
Jei tiesės a ir b kertasi, tai rašome $a \cap b$.
Kai nurodome jų susikirtimo tašką (A), tai rašome $a \cap b = A$.



Jei tiesės a ir b yra lygiagrečios, tai rašome $a \parallel b$.

Lygiagrečios tiesės erdvėje, kaip ir plokštumoje, pasižymi savybe:
Jei tiesė a lygiagreti tiesei b ($a \parallel b$) ir tiesė a lygiagreti tiesei c ($a \parallel c$), tai ir tiesė b lygiagreti tiesei c ($b \parallel c$).
Šios savybės neįrodinėsime.

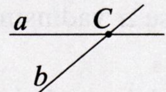
Šia savybe, pavyzdžiui, pasižymi trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ briaunos AA_1, BB_1 ir CC_1.



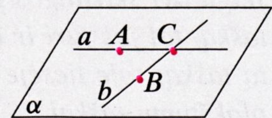
$AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel CC_1$.

Per dvi susikertančias arba lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Įrodykime, kad per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.
Duota: $a \cap b = C$.
Įrodyti: yra vienintelė plokštuma α tokia, kad $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.



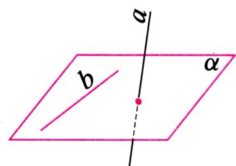
Įrodymas. Tiesėse a ir b pasirinkime atitinkamai taškus A ir B, nesutampančius su tašku C. Taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje, todėl per juos eina vienintelė plokštuma α (1 aksioma). Tai plokštumai priklauso ir tiesė a, nes du jos taškai A ir C yra toje plokštumoje (2 aksioma).



Analogiškai įsitikiname, kad ir tiesė b priklauso tai plokštumai. Taigi, per dvi susikertančias tieses eina plokštuma. Tokia plokštuma yra vienintelė. Tarkime, kad kita plokštuma β eina per tieses a ir b. Ji eina ir per šių tiesių taškus A, B ir C. Vadinasi, ji sutampa su plokštuma α (1 aksioma).

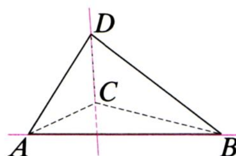
Jeigu nėra tokios plokštumos, kuriai priklausytų dvi duotosios tiesės, tai tos tiesės vadinamos prasilenkiančiomis.

Prasilenkiančias tieses galima vaizduoti taip:

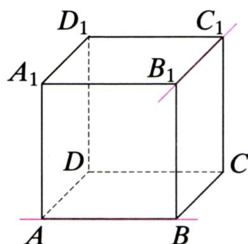


Tiesės a ir b — prasilenkiančios.

Prasilenkiančias tieses galima matyti erdviniuose kūnuose, pavyzdžiui, piramidėje ar kube:



Tiesės, kuriose, pavyzdžiui, yra kraštinės DC ir AB, yra prasilenkiančios.

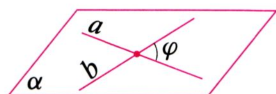


Tiesės, kuriose, pavyzdžiui, yra kraštinės AB ir B_1C_1, yra prasilenkiančios.

? Išvardykite daugiau prasilenkiančių tiesių porų, esančių aukščiau pavaizduotuose kūnuose.

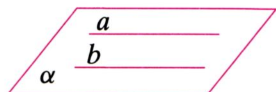
Panagrinėkime kampą tarp dviejų erdvės tiesių. Kampą tarp tiesių a ir b žymėsime $\angle(a, b)$.

Jeigu dvi tiesės susikerta, tai kampu tarp jų vadiname mažesnįjį iš susidariusių gretutinių kampų.



Jei $a \cap b$, tai $\angle(a, b) = \varphi$.

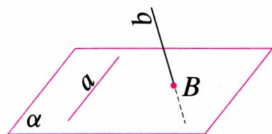
Kai $\varphi = 90^\circ$, sakysime, kad tiesės a ir b yra statmenos. Rašysime $a \perp b$. Jeigu tiesės yra lygiagrečios, tai kampą tarp jų laikysime lygiu nuliui.



Jei $a \parallel b$, tai $\angle(a, b) = 0^\circ$.

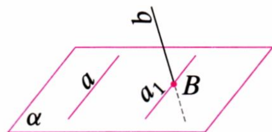
Jeigu tiesės a ir b yra prasilenkiančios, tai kampą tarp jų apibrėšime taip:

1) Vienoje tiesėje, pavyzdžiui, b, pasirinkime tašką B. Per tiesę a ir tašką B brėžiame plokštumą α.



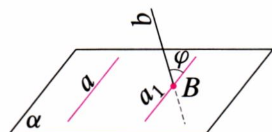
$B \in b,\ a \subset \alpha,\ B \in \alpha.$

2) Plokštumoje α per tašką B brėžiame tiesę a_1, lygiagrečią tiesei a.



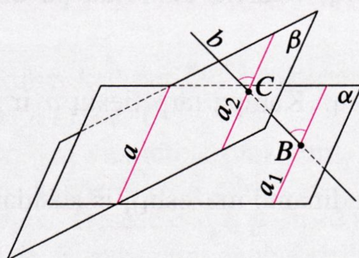
$a_1 \subset \alpha,\ B \in a_1,\ a_1 \parallel a.$

3) Randame kampą tarp susikertančių tiesių a_1 ir b. Šį kampą laikysime kampu tarp prasilenkiančių tiesių a ir b.



$\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi.$

Įrodysime, kad taip apibrėžtas kampas tarp prasilenkiančių tiesių nepriklauso nuo taško B pasirinkimo.



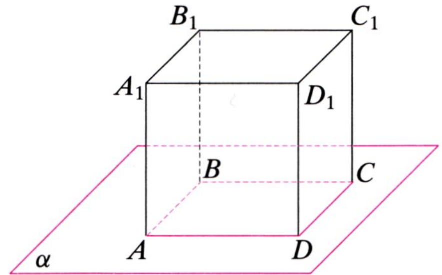
Tiesėje b pasirinkime kitą tašką C, nesutampantį su tašku B. Per tiesę a ir tašką C nubrėžkime plokštumą β. Per tašką C plokštumoje β nubrėžkime tiesę $a_2 \parallel a$. Kadangi $a \parallel a_1$ ir $a \parallel a_2$, tai $a_1 \parallel a_2$. Kadangi tiesės a_1 ir a_2 yra lygiagrečios, tai per jas eina vienintelė plokštuma.
Tai plokštumai priklauso ir tiesė b, nes jos taškai B ir C yra toje plokštumoje. Turime dvi lygiagrečias tieses a_1 ir a_2, perkirstas tiese b. Todėl susidarę atitinkamieji kampai yra lygūs. Vadinasi, $\angle(a_2, b) = \angle(a_1, b)$.

Pratimai ir uždaviniai

1. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio pagrindas $ABCD$ yra plokštumoje α. Kiekviena gretasienio briauna yra tiesės atkarpa erdvėje (įsivaizduokite, kad briaunos neribotai pratęstos). Kiekviena gretasienio siena (stačiakampis) yra plokštumos dalis erdvėje (įsivaizduokite, kad sienos yra neribotai padidintos).

Nurodykite:

a) plokštumas, einančias per tašką A;
b) plokštumas, einančias per tiesę AA_1;
c) tieses, lygiagrečias tiesei AB;
d) tieses, kertančias tiesę AB;
e) tieses kertančias tiesę AD ir statmenas jai;
f) tieses, prasilenkiančias su tiese AB.



2. Trys taškai A, B ir C, nesantys vienoje tiesėje, yra vienoje plokštumoje, o taškas D tai plokštumai nepriklauso. Kiek galima nubraižyti skirtingų plokštumų, kuriose būtų po 3 iš minėtų taškų? Išvardykite tas plokštumas.

3. Taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Ar tiesės AB ir CD gali būti lygiagrečios? susikertančios? Atsakymą pagrįskite.

4. Erdvėje pažymėti 5 taškai A, B, C, D ir E taip, kad kiekvienai plokštumai, einančiai per bet kuriuos 3 iš šių taškų, nepriklauso likusieji du taškai.

a) Išvardykite visas skirtingas plokštumas, einančias per tris iš šių 5 taškų.
b) Įrodykite, kad bet kurie trys iš šių taškų nėra vienoje tiesėje.

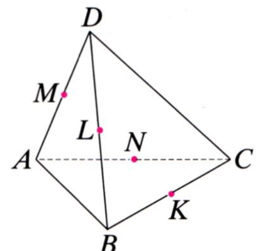
5. Iš 5 taškų, nesančių vienoje plokštumoje, trys taškai yra vienoje tiesėje. Kiek skirtingų plokštumų galima išvesti taip, kad kiekvienoje plokštumoje būtų po 3 duotuosius taškus?

6. Įrodykite, kad:

a) per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma;
b) per tiesę ir šalia jos esantį tašką eina vienintelė plokštuma.

7. Taškai K, L, M ir N yra tetraedro $ABCD$ briaunų BC, BD, AD ir AC vidurio taškai. Ar galima išvesti plokštumą per tieses:

a) AD ir KM;
b) AD ir KL;
c) AD ir LN;
d) LM ir KN;
e) KM ir NL?



8*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Nubrėžtos šio kubo dviejų sienų įstrižainės AD_1 ir BC_1. Įrodykite, kad keturkampis ABC_1D_1 yra lygiagretainis (iš tikrųjų — tai stačiakampis).

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Taškai K, L, M ir N — šio kubo briaunų AA_1, AB, BC ir CC_1 vidurio taškai. Įrodykite, kad:

a) tiesės KN ir LM yra lygiagrečios;

*b) tiesės KL ir MN yra susikertančios.

10. $ABCD$ — tetraedras. Taškai K, L, M ir N — šio tetraedro briaunų AB, BC, CD ir DA vidurio taškai. Įrodykite, kad keturkampis $KLMN$ yra lygiagretainis.

11. Išvardykite duotojo briaunainio briaunų poras, esančias prasilenkiančiose tiesėse, jei tas briaunainis yra:

a) trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$;

b) keturkampė piramidė $SABCD$.

12. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1D_1C_1$ briaunos $AB = 6\,\text{cm}$, $AD = 8\,\text{cm}$, $AA_1 = 6\,\text{cm}$.

Apskaičiuokite kampą tarp:

a) AB ir BC;

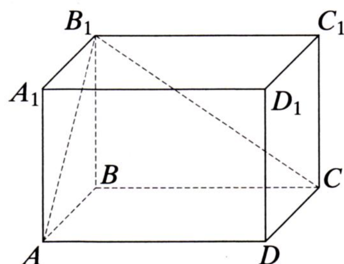
b) AB ir C_1D_1;

c) DC ir A_1D_1;

d) AB_1 ir CC_1;

e) AB_1 ir DC;

f) AB_1 ir B_1C. (*Nurodymas*. Remkitės kosinusų teorema.)



13. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas.

Raskite kampą tarp:

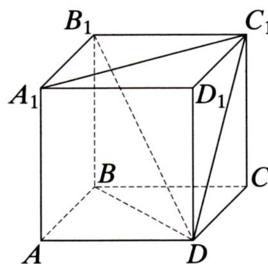
1) A_1C_1 ir AC;

2) A_1C_1 ir DC_1;

3) A_1C_1 ir BD;

4) A_1C_1 ir AC_1;

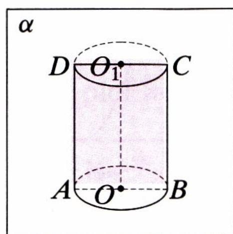
5) B_1D ir AA_1.



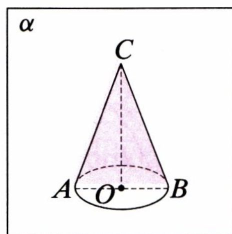
b) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Taškai E ir F yra atitinkamai sienų BCC_1B_1 ir CC_1D_1D centrai. Įrodykite, kad tiesė EF yra statmena tiesei A_1C_1.

Nurodymas. Įrodykite, kad: 1) $EF \parallel BD$; 2) $EF \parallel B_1D_1$.

14. Plokštuma, einanti per ritinio pagrindų centrus (ritinio aukštinę), iš ritinio iškerta stačiakampį, kuris vadinamas ritinio *ašiniu pjūviu.*
Plokštuma, einanti per kūgio aukštinę, iš kūgio iškerta lygiašonį trikampį, kuris vadinamas kūgio *ašiniu pjūviu.*



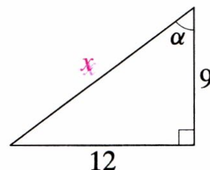
$OO_1 \subset \alpha, ABCD \subset \alpha,$
$ABCD$ — stačiakampis



$CO \subset \alpha, \Delta ABC \subset \alpha,$
$AC = BC$

a) Apskaičiuokite ritinio tūrį ir viso paviršiaus plotą, jeigu ritinio ašinio pjūvio plotas lygus 40 dm^2, o ritinio aukštinė 1 dm ilgesnė už pagrindo spindulį.
b) Raskite kūgio šoninio paviršiaus plotą, jei kūgio ašinio pjūvio plotas lygus 12 m^2, o kūgio aukštinė 1 m ilgesnė už pagrindo spindulį. Apskaičiuokite ašinio pjūvio perimetrą.

15. Naudodamiesi brėžinio duomenimis apskaičiuokite:
a) trikampio įžambinės ilgį x;
b) trikampio perimetrą;
c) $\sin\alpha$;
d) $\cos\alpha$.



16. Išspręskite nelygybę:
a) $x^2 - x - 12 \leqslant 0$; b) $x^2 + 3x - 4 > 0$.

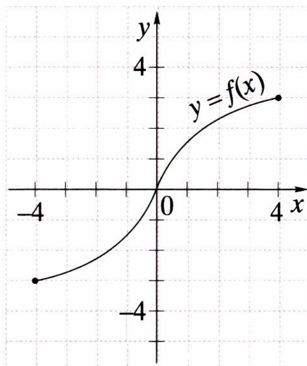
17. Vienas skaičius keturiais vienetais didesnis už kitą. Didesniojo skaičiaus kvadrato ir mažesniojo skaičiaus skirtumas lygus 46. Raskite tuos skaičius.

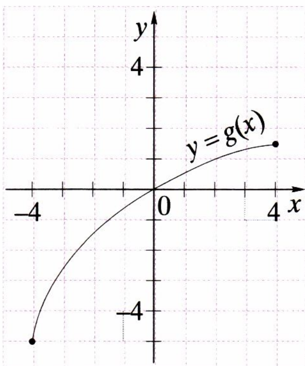
18. Kateris 34 km upe pasroviui nuplaukė per tokį pat laiką, kaip ir 26 km šia upe prieš srovę. Katerio savasis greitis lygus 15 km/h. Raskite upės tėkmės greitį.

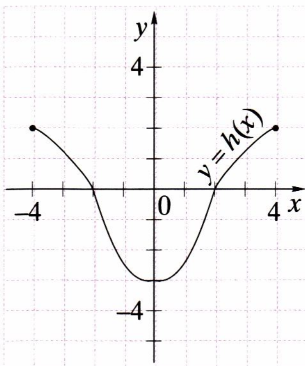
19. Reiškinį išreikškite trupmena:
a) $\frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2}$; b) $\frac{a^2}{b^3} \cdot 2b$; c) $\frac{a^3}{b} : 2a$; d) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}$.

20. Išspręskite lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} 2x^2 - 5y = -8, \\ x + y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 3y = 12, \\ x + y = 2. \end{cases}$

21. Nubraižyti funkcijų $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ grafikai.







a) Kuri iš funkcijų yra lyginė ir kuri — nelyginė?
b) Raskite $g(2)$; $h(0)$; $f(-4)$.
c) Nurodykite kiekvienos funkcijos reikšmių sritį.
d) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x) > 0$? $g(x) \leqslant 0$? $h(x) < 0$?

22. Metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma bus lygi 6?

23. Atkarpos AB vienas galas yra taškas $B(-2;\ -5)$, o šios atkarpos vidurio taškas yra $C(2;\ -4)$. Raskite:
a) taško A koordinates;
b) atkarpos AB ilgį.

24. Iš tarnautojo mėnesinio atlyginimo išskaičiuota 35,19 Lt mokesčio SODRAI, kai šio mokesčio tarifas yra 3% apskaičiuoto atlyginimo.
a) Koks tarnautojo apskaičiuotas atlyginimas per mėnesį?
b) Kiek litų tarnautojas moka pajamų mokesčio, jei šio mokesčio tarifas yra 33% atlyginimo dalies, viršijančios 250 Lt neapmokestinamąjį minimumą?
c) Kiek litų tarnautojas gavo per mėnesį į rankas, atskaičius pajamų ir SODROS mokesčius?

25. Apskaičiuokite stačiojo trikampio statinių ilgius, jei:
a) jo įžambinė lygi $8\sqrt{2}$ cm, o plotas — 32 cm^2;
b) jo įžambinė lygi $10\sqrt{2}$ cm, o plotas — 50 cm^2.

26. Žadintuvas per parą vėluoja 8 min. Keliomis minutėmis reikia pasukti minutinę rodyklę pirmyn 20 valandą, kad kitą dieną žadintuvas suskambėtų lygiai 8 valandą?

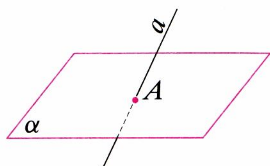
2 Tiesė ir plokštuma erdvėje. Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Galimos trys tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtys.
1) Tiesė yra plokštumoje:



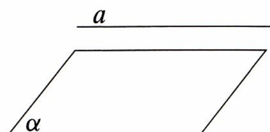
$a \subset \alpha$ — tiesė a priklauso plokštumai α.
Visi tiesės a taškai priklauso plokštumai α.

2) Tiesė kerta plokštumą:



$a \cap \alpha = A$ — tiesė a kerta plokštumą α taške A.
Tiesė a ir plokštuma α turi tik vieną bendrą tašką (A).

3) Tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios:

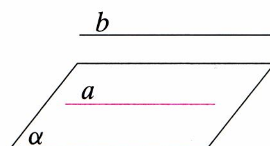


$a \parallel \alpha$ — tiesė a lygiagreti plokštumai α.
Tiesė a ir plokštuma α bendrų taškų neturi.

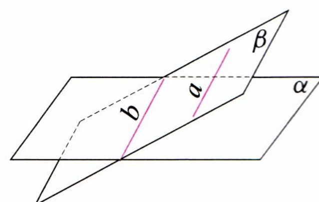
Įsitikinti, kad tiesė yra lygiagreti plokštumai, galima remiantis tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiais.

Tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiai

1. *Jei tiesė, nesanti plokštumoje, yra lygiagreti kuriai nors tos plokštumos tiesei, tai ji lygiagreti ir plokštumai.*
   Jei $b \parallel a$ ir $a \subset \alpha$, o $b \not\subset \alpha$, tai $b \parallel \alpha$.

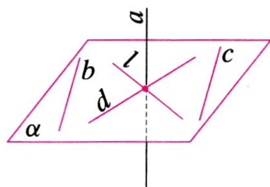


2. *Jei plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią kitai plokštumai, ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo tiesė yra lygiagreti tai tiesei.*
   Jei $a \parallel \alpha$, $\beta \cap \alpha = b$ ir $a \subset \beta$, tai $a \parallel b$.



Įrodymą žr. 32 pratime.

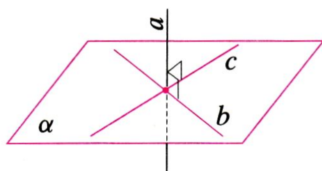
Panagrinėkime atvejį, kai tiesė kerta plokštumą.
Tiesė vadinama *statmena plokštumai*, jeigu ji yra statmena kiekvienai tiesei, esančiai toje plokštumoje.

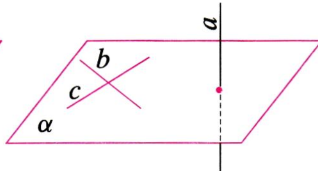


Jei $a \perp b$, $a \perp c$, $a \perp d$, $a \perp l, \ldots$
$(b, c, d, l, \ldots \subset \alpha)$,
tai $a \perp \alpha$ — tiesė a statmena plokštumai α.

Įsitikinti, kad tiesė yra statmena plokštumai, galima remiantis tiesės ir plokštumos statmenumo požymiu.

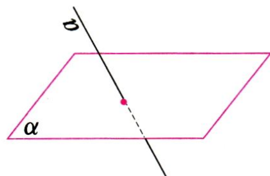
Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis. *Jei tiesė yra statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ta tiesė statmena ir plokštumai.*





Duota: $a \perp c$, $a \perp b$, o $c \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ ir $c \cap b = A$.
Įrodyti: $a \perp \alpha$.
Šio požymio neįrodinėsime.

Tiesė vadinama *pasvirąja plokštumai*, jei ji kerta tą plokštumą ir nėra jai statmena.



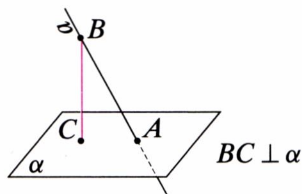
Jei $a \cap \alpha$ ir $a \not\perp \alpha$,
tai tiesė a yra pasviroji plokštumai α.

Panagrinėkime kampą tarp tiesės ir plokštumos.
Jei tiesė a yra plokštumoje α, arba tiesė a yra lygiagreti plokštumai α, tai kampą tarp tiesės a ir plokštumos α natūralu laikyti lygiu nuliui, t. y. jei $a \subset \alpha$ arba $a \parallel \alpha$, tai $\angle(a, \alpha) = 0°$.
Jei tiesė a yra statmena plokštumai α, tai natūralu laikyti, kad $\angle(a, \alpha) = 90°$.

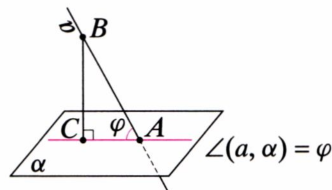
Kampu tarp pasvirosios ir plokštumos vadinamas kampas tarp pasvirosios ir jos projekcijos plokštumoje.

Kampo tarp pasvirosios a ir plokštumos α patogu ieškoti taip:

1) Iš bet kurio pasvirosios taško B, nesutampančio su pasvirosios ir plokštumos sankirtos tašku A, brėžiame statmenį plokštumai. Statmens ir plokštumos susikirtimo tašką (statmens pagrindą) pažymėkime C.



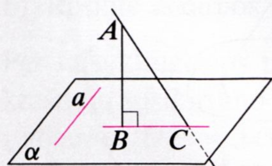
2) Per taškus C ir A brėžiame tiesę. Tiesė AC yra pasvirosios a projekcija plokštumoje α. $\angle BAC = \varphi$ — kampas tarp pasvirosios a ir plokštumos α, t. y. $\angle(a, \alpha) = \varphi$.



Sprendžiant uždavinius dažnai praverčia ryšys tarp pasvirosios, jos projekcijos ir tai pasvirajai statmenos tiesės, esančios plokštumoje. Šį ryšį nusako teorema:

Trijų statmenų teorema. *Jei plokštumos tiesė yra statmena pasvirajai, tai ji statmena ir pasvirosios projekcijai toje plokštumoje.*

Duota: $a \subset \alpha$, AC — pasviroji, $a \perp AC$, BC — pasvirosios projekcija.
Įrodyti: $a \perp BC$.



Įrodymas. $AB \perp a$, nes $AB \perp \alpha$. Kadangi $a \perp AC$ (duota), tai tiesė a yra statmena plokštumai ABC, nes ji statmena dviem susikertančioms šios plokštumos tiesėms AB ir AC. Taigi $a \perp BC$, nes ji statmena bet kuriai plokštumos ABC tiesei.

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas:
Jei plokštumos tiesė yra statmena pasvirosios projekcijai toje plokštumoje, tai ta tiesė yra statmena ir pasvirajai.

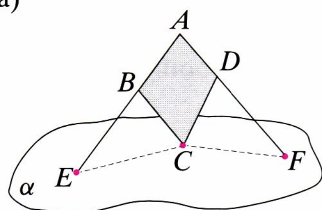
Pratimai ir uždaviniai

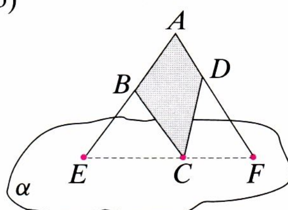
27. Keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra stačiakampis $ABCD$, o aukštinė SO (čia O — pagrindo įstrižainių susikirtimo taškas). Išvardykite piramidės briaunas, kurios yra tiesėse:
a) priklausančiose pagrindo plokštumai;
b) kertančiose pagrindo plokštumą;
c) prasilenkiančiose su tiese SA;
d) prasilenkiančiose su tiese SO.

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis. Išvardykite gretasienio briaunas, esančias tiesėse:

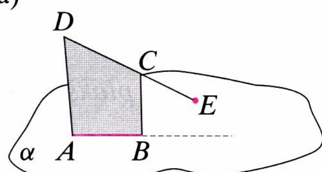
a) lygiagrečiose plokštumai ABC; b) lygiagrečiose plokštumai ABB_1;
c) statmenose plokštumai ABC; d) statmenose plokštumai CDD_1.

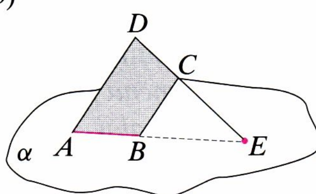
29. Brėžinyje pavaizduotas keturkampis $ABCD$, kurio viršūnė C yra plokštumoje α (kitos keturkampio viršūnės nepriklauso tai plokštumai). Tiesė, kurioje yra keturkampio kraštinė AB, kerta plokštumą α taške E, o tiesė, kurioje yra keturkampio kraštinė AD — taške F. Ar teisingai nubraižytas brėžinys? Paaiškinkite, kodėl.

a)


b)


30. Brėžinyje pavaizduotas keturkampis $ABCD$, kurio kraštinė AB yra plokštumoje α, o kraštinės DC tęsinys kerta plokštumą α taške E. Ar teisingai nubraižytas brėžinys? Paaiškinkite, kodėl.

a)


b)


31. Įrodykite teoremą: Jei tiesės a ir b yra lygiagrečios ir tiesė a kerta plokštumą α, tai ir tiesė b kerta plokštumą α.

32. Įrodykite:

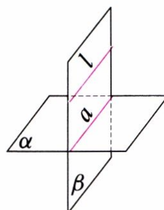
a) Jei tiesė l yra lygiagreti tiesei a, esančiai plokštumoje α, tai tiesė l lygiagreti ir plokštumai α.

b) Jei tiesė a yra lygiagreti plokštumai α, tai plokštuma β, einanti per tiesę a ir kertanti plokštumą α, kerta ją tiese m, lygiagrečia tiesei a.

c) Jei tiesė lygiagreti dviem susikertančioms plokštumoms, tai ji lygiagreti ir jų susikirtimo tiesei.

Pavyzdys. a) *Duota*: $l \parallel a$, $a \subset \alpha$, $l \not\subset \alpha$.

Įrodyti: $l \parallel \alpha$.



Įrodymas. Kadangi tiesės l ir a yra lygiagrečios, tai per jas galima išvesti vienintelę plokštumą β. Akivaizdu, kad plokštuma β kerta plokštumą α tiese a, t. y. $\alpha \cap \beta = a$.

Tarkime, kad $l \nparallel \alpha$. Tada tiesė l kirs plokštumą α taške, kuris priklauso tiesei a (plokštumų α ir β susikirtimo tiesei). Bet tada tiesės a ir l susikerta, o tai prieštarauja sąlygai, kad $l \parallel a$. Vadinasi, mūsų prielaida, kad $l \nparallel \alpha$, yra neteisinga. Taigi $l \parallel \alpha$.

---

33. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienų ABB_1A_1 ir $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainių AB_1 ir B_1D_1 vidurio taškai M ir N sujungti atkarpa MN.

a) Įrodykite, kad $MN \parallel AA_1D_1$.

b) Raskite atkarpos MN ilgį, jei $AD = 6\,\text{cm}$, o $DD_1 = 8\,\text{cm}$.

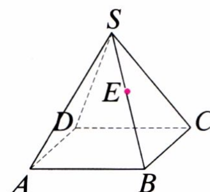
34*. Per taisyklingosios trikampės piramidės $ABCD$ pagrindo ABC pusiaukraštinių susikirtimo tašką O ir briaunos DC tašką E, dalijantį šią briauną į atkarpas $DE = 5\,\text{cm}$ ir $EC = 10\,\text{cm}$, nubrėžta atkarpa OE.

a) Įrodykite, kad $OE \parallel DAB$. b) Raskite OE ilgį, jei $AB = 18\,\text{cm}$.

35. Taškai A ir B yra plokštumoje α, o taškas C nėra toje plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė, einanti per atkarpų AC ir BC vidurio taškus, yra lygiagreti plokštumai α.

36. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Taškai E ir F yra briaunų AA_1 ir CC_1 vidurio taškai. Įrodykite, kad plokštuma B_1EF yra lygiagreti tiesei AC. *Nurodymas*. Įrodykite, kad tiesė AC yra lygiagreti tiesei EF.

37. Keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra stačiakampis $ABCD$. Per briaunos SB bet kurį tašką E nubraižykite plokštumą ADE.



38. Apskritimo spindulys lygus 3 dm. Iš apskritimo centro O iškeltas statmuo OB apskritimo plokštumai. Per apskritimo tašką A nubrėžta liestinė ir joje pažymėtas taškas C. Raskite atkarpos BC ilgį, jei $AC = 2$ dm, $OB = 6$ dm.

39. Stačiakampio kraštinės lygios 5 cm ir 8 cm. Iš jo viršūnės iškeltas statmuo stačiakampio plokštumai. Šiame statmenyje 12 cm atstumu nuo plokštumos pažymėtas taškas. Apskaičiuokite atstumus nuo to taško iki kitų stačiakampio viršūnių.

40. a) Iš taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios, kurių kiekvienos ilgis lygus 4 dm. Kampas tarp pasvirųjų lygus 60°, o kampas tarp jų projekcijų yra status. Apskaičiuokite atstumą nuo taško iki plokštumos.

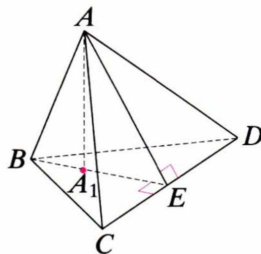
b) Atstumas nuo taško iki plokštumos lygus 1 m. Iš to taško į plokštumą išvestos dvi lygios pasvirosios ir statmuo. Pasvirosios yra statmenos viena kitai, o su statmeniu sudaro 60° kampus. Raskite atstumą tarp pasvirųjų pagrindų.

41. Įrodykite atvirkštinę trijų statmenų teoremą: Jei plokštumos tiesė yra statmena pasvirosios projekcijai, tai ji statmena ir pačiai pasvirajai.

42. $ABCD$ — trikampė piramidė, kurios briaunos AB ir CD yra statmenos. AA_1 — statmuo plokštumai BCD.

a) Įrodykite, kad A_1 yra trikampio BCD aukštinėje BE.

b) Įrodykite, kad AE yra trikampio ACD aukštinė. *Nurodymas*. Įrodykite, kad CD yra statmena plokštumai ABA_1.



43*. Įrodykite, kad kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė BD_1 yra statmena plokštumai A_1C_1D.

44. Iš kvadrato $ABCD$ centro O iškeltas statmuo OE. Įrodykite, kad tiesė AE yra statmena kvadrato įstrižainei BD.

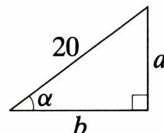
45. Iš lygiakraščio trikampio ABC kraštinės AB vidurio taško D trikampio plokštumai iškeltas statmuo DE. Įrodykite, kad tiesė CE statmena tiesei AB.

46. Įrodykite, kad jei viena iš lygiagrečių plokštumų statmena tiesei, tai ir kita plokštuma statmena tai tiesei.

47. Per įbrėžto į trikampį apskritimo centrą išvesta trikampio plokštumai statmena tiesė. Įrodykite, kad kiekvienas tos tiesės taškas yra vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių. (*Nurodymas*. Remkitės 41 uždaviniu.)

48. a) Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 1,5 dm. Iš apskritimo centro išvestas statmuo trikampio plokštumai. Statmens ilgis lygus 2 dm. Raskite atstumą nuo to statmens galo iki trikampio kraštinių.
b) Stačiojo trikampio statiniai lygūs 60 cm ir 80 cm. Iš stačiojo kampo viršūnės iškeltas statmuo trikampio plokštumai. Statmens ilgis lygus 36 cm. Raskite atstumus nuo statmens galų iki įžambinės.
Nurodymas. Remkitės atvirkštine trijų statmenų teorema.

49. Remdamiesi brėžinio duomenimis ir žinodami, kad $\cos\alpha = 0{,}8$, raskite:
a) trikampio statinių a ir b ilgius;
b) trikampio plotą;
c) $\sin\alpha$;
d) $\operatorname{tg}\alpha$.



50. Išspręskite nelygybių sistemą:
a) $\begin{cases} 3(x+1) < -(5+x), \\ 2x+1 \geqslant 10x-7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x \leqslant 2x+8, \\ 2x-15 < 3(5-x). \end{cases}$

51. Trikampio aukštinė 3 cm ilgesnė už jo kraštinę, į kurią nubrėžta ta aukštinė. Raskite aukštinės ilgį, jei trikampio plotas lygus 65 cm^2.

52. Išspręskite lygtį:
a) $\frac{x}{x+2{,}25} = \frac{4}{2x+21}$; b) $\frac{4}{7x^2-4} = \frac{1}{2x^2-5}$.

53. Suprastinkite reiškinį:
a) $3\sqrt{160} - \frac{1}{5}\sqrt{1000} - \sqrt{50} : \sqrt{5}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{60} + 2\sqrt{1500} - \sqrt{45} \cdot \sqrt{3}$.

54. Keliais būdais iš 25 klasės mokinių galima išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją?

55. Raskite atstumą tarp plokštumos taškų A ir B bei atkarpos AB vidurio taško C koordinates, jei: $A(-9; -5)$, $B(-3; 0)$.

56. Prekė kainavo 200 Lt. Vienoje parduotuvėje ši prekė buvo piginama tris kartus po 10 procentų nuo pradinės kainos, o kitoje — tris kartus po 10 procentų nuo tuo momentu esamos kainos.
a) Kiek kainuoja ši prekė dabar vienoje ir kiek — kitoje parduotuvėje?
b) Su kiek litų nuolaida parduodama ši prekė kiekvienoje parduotuvėje?
c) Kokia procentinė galutinės prekės kainos nuolaida kiekvienoje parduotuvėje?

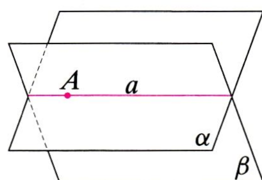
57. Jeigu šiandien antradienis, tai kokia savaitės diena:
a) bus po 1001 paros; b) buvo prieš 1001 parą?

3 Dviejų plokštumų tarpusavio padėtis. Kampas tarp plokštumų

Dvi skirtingos plokštumos gali:

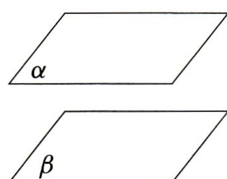
1) turėti bendrų taškų; 2) neturėti bendrų taškų.

Jeigu dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jos susikerta tiese, kurioje yra visi tų plokštumų bendrieji taškai.



Jei $A \in \alpha$, $A \in \beta$,
tai $\alpha \cap \beta = a$, $A \in a$.

Dvi plokštumos, neturinčios bendrų taškų, vadinamos lygiagrečiomis plokštumomis.

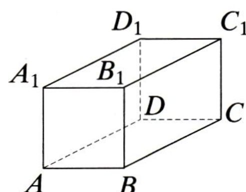


Jei plokštumos α ir β yra lygiagrečios, tai rašome $\alpha \parallel \beta$.

Užduotis. Išvardykite stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

a) sienas, esančias lygiagrečiose plokštumose;

b) plokštumas, kurios kertasi tiese AD.

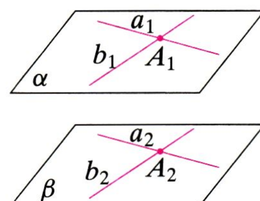


Įsitikinti, kad dvi plokštumos yra lygiagrečios, galima remiantis plokštumų lygiagretumo požymiu.

Plokštumų lygiagretumo požymis. *Jei vienos plokštumos dvi susikertančios tiesės yra atitinkamai lygiagrečios kitos plokštumos dviem susikertančioms tiesėms, tai tos plokštumos yra lygiagrečios.*

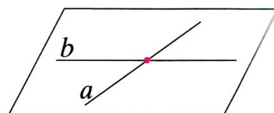
Duota: $a_1, b_1 \subset \alpha$, $a_1 \cap b_1 = A_1$,
$a_2, b_2 \subset \beta$, $a_2 \cap b_2 = A_2$,
$a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$.

Įrodyti: $\alpha \parallel \beta$.

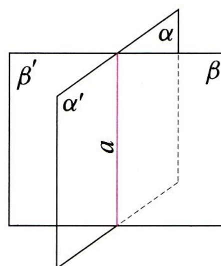


Įrodymą žr. 60 uždavinyje.

Dvi susikertančios tiesės per jas einančią plokštumą dalija į 4 dalis — dvi poras tarpusavyje lygių kryžminių kampų.



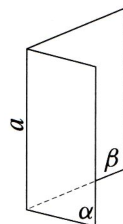
Analogiškai dvi susikertančios plokštumos erdvę dalija į 4 dalis. Kiekvieną susidariusią erdvės dalį riboja dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kraštą a: αa ir βa; αa ir $\beta' a$; $\beta' a$ ir $\alpha' a$; $\alpha' a$ ir βa.



Dvisieniu kampu vadinama erdvės dalis, apribota dviem pusplokštumėmis, turinčiomis bendrą kraštą (tiesę).

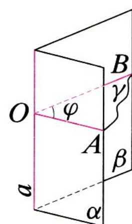
Dvisienį kampą ribojančios pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo *sienomis*, o jų bendras kraštas — dvisienio kampo *briauna*.

Dvisienį kampą, kurį sudaro pusplokštumės αa ir βa, žymėsime $\angle \alpha a \beta$.



Dvisienio kampo didumą apibrėšime taip:

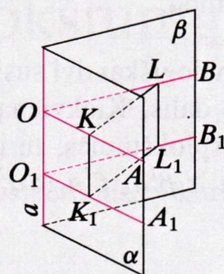
1) Brėžiame plokštumą γ, statmeną dvisienio kampo $\alpha a \beta$ briaunai a.
2) Sankirtoje gavome kampą AOB — jis vadinamas dvisienio kampo $\alpha a \beta$ *tiesiniu kampu*.
   Tiesinio kampo didumą ir laikysime dvisienio kampo didumu, t. y. $\angle \alpha a \beta = \angle AOB = \varphi$.



Pastebėkime, kad $a \perp OA$ ir $a \perp OB$ (nes $a \perp \gamma$). Todėl kampą tarp pusplokštumių αa ir βa, turinčių bendrą kraštą, galima nusakyti taip: iš bet kurio dvisienio kampo $\alpha a \beta$ briaunos a taško O pusplokštumėse αa ir βa brėžiame du spindulius OA ir OB, statmenus briaunai a. Gautas kampas AOB ir yra kampas tarp pusplokštumių αa ir βa.

Įrodysime, kad dvisienio kampo $\alpha a \beta$ didumas nepriklauso nuo taško O pasirinkimo briaunoje a.

Įrodymas. Tiesėje a pažymėkime tašką O_1, nesutampantį su tašku O. Iš taško O_1 pusplokštumėje αa nubrėžkime spindulį O_1A_1, o pusplokštumėje βa — spindulį O_1B_1, statmenus tiesei a. Spinduliai OA ir O_1A_1 yra pusplokštumėje αa ir yra statmeni tiesei a, todėl yra lygiagretūs, t. y. $OA \parallel O_1A_1$. Analogiškai įsitikiname, kad $OB \parallel O_1B_1$.



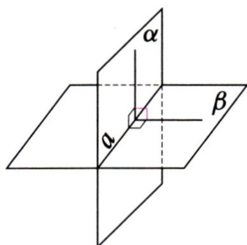
Spinduliuose OA ir OB pasirenkame po tašką K ir L. Per tuos taškus brėžiame tieses, lygiagrečias tiesei a. Nubrėžtos tiesės spindulius O_1A_1 ir O_1B_1 kerta atitinkamai taškuose K_1 ir L_1. Keturkampiai KOO_1K_1 ir LOO_1L_1 yra lygiagretainiai, nes jų priešingos kraštinės yra lygiagrečios. Vadinasi, $KK_1 = OO_1 = LL_1$, $OK = O_1K_1$, $OL = O_1L_1$. Keturkampis KLL_1K_1 taip pat yra lygiagretainis ($KK_1 = LL_1$ ir $KK_1 \parallel LL_1$). Todėl $KL = K_1L_1$. Taigi $\triangle KOL = \triangle K_1O_1L_1$ (pagal tris kraštines).
Vadinasi, $\angle KOL = \angle K_1O_1L_1$.

Dvisieniai kampai yra lygūs, jei yra lygūs jų tiesiniai kampai.
Nesunku įsitikinti, kad kertantis plokštumoms susidarę keturi dvisieniai kampai poromis yra lygūs (kaip ir susikertančių tiesių atveju).

Kampu tarp dviejų susikertančių plokštumų vadinamas mažesnis iš susidariusių dvisienių kampų.

Jei plokštumos yra lygiagrečios, tai kampą tarp jų laikysime lygiu nuliui.

Jeigu plokštumos kertasi stačiu kampu, tai tokios plokštumos vadinamos *statmenomis*.

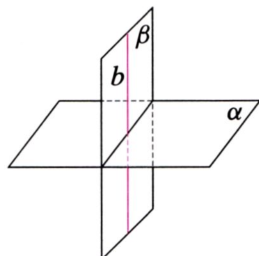


Jei plokštumos α ir β yra statmenos, tai rašome $\angle(\alpha, \beta) = 90^\circ$ arba $\alpha \perp \beta$.

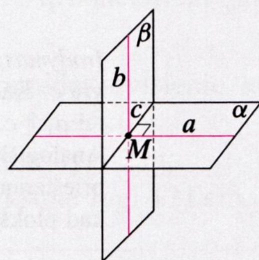
Įsitikinti, kad dvi plokštumos yra statmenos, galima remiantis plokštumų statmenumo požymiu.

Plokštumų statmenumo požymis. *Jei plokštuma eina per statmenį kitai plokštumai, tai tos plokštumos yra statmenos.*

Duota: $b \perp \alpha$, $b \subset \beta$.
Įrodyti: $\beta \perp \alpha$.



Įrodymas. Per statmens b ir plokštumos α susikirtimo tašką M plokštumoje α brėžiame tiesę a, statmeną plokštumų α ir β susikirtimo tiesei c. Kampas tarp tiesių a ir b yra dvisienio kampo $\alpha c \beta$ tiesinis kampas. Kadangi $b \perp \alpha$, tai $b \perp a$. Vadinasi, $\angle \alpha c \beta = \angle(a, b) = 90°$. Taigi plokštumos α ir β yra statmenos.



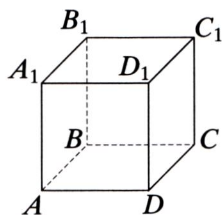
Pratimai ir uždaviniai

58. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a) Išvardykite sienas, kurios yra lygiagrečiose plokštumose.

b) Dvi plokštumas ABB_1 ir DCC_1 kerta plokštuma ADD_1. Raskite šių plokštumų susikirtimo tieses. Kokia tų tiesių tarpusavio padėtis?

c) Kokios lygiagrečių plokštumų poros kerta plokštumą B_1A_1D? Nurodykite tų plokštumų susikirtimo tieses.



59. Tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b — plokštumoje β. Kokia gali būti tiesių a ir b tarpusavio padėtis, kai:

a) plokštumos α ir β susikerta;

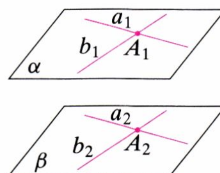
b) plokštumos α ir β yra lygiagrečios?

60. Įrodykite teoremą:

a) Jeigu plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas, tai tų plokštumų susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.

b) Jeigu vienos plokštumos dvi susikertančios tiesės yra atitinkamai lygiagrečios kitos plokštumos dviem susikertančioms tiesėms, tai tos plokštumos yra lygiagrečios. (Dviejų plokštumų lygiagretumo požymis.)

Pavyzdys. b) *Duota*: $a_1, b_1 \subset \alpha$, $a_1 \cap b_1 = A_1$,
$a_2, b_2 \subset \beta$, $a_2 \cap b_2 = A_2$,
$a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$.
Įrodyti: $\alpha \parallel \beta$.



Įrodymas. Tarkime, kad plokštumos α ir β susikerta ir jų susikirtimo tiesė yra c. Kadangi $a_1 \parallel a_2$, tai $a_1 \parallel \beta$. Kadangi $a_1 \parallel \beta$, o $\alpha \cap \beta = c$ ir $a_1 \subset \alpha$, tai $a_1 \parallel c$.
Analogiškai $b_1 \parallel c$. Kadangi $a_1 \parallel c$ ir $b_1 \parallel c$, tai ir $a_1 \parallel b_1$. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad tiesės a_1 ir b_1 susikerta. Vadinasi, mūsų prielaida, kad plokštumos α ir β susikerta, yra neteisinga. Taigi $\alpha \parallel \beta$.

---

61. Nusibraižykite stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a) Kokias lygiagrečias plokštumas kerta plokštuma ACC_1?

b) Pavaizduokite šio stačiakampio gretasienio pjūvį plokštuma ACC_1.

62. Nusibraižykite tetraedrą $ABCD$. Pažymėkite jo briaunos AD vidurio tašką E.

1) Nubraižykite šio tetraedro pjūvį plokštuma, lygiagrečia plokštumai DBC ir einančia per tašką E.

2) Apskaičiuokite gauto pjūvio perimetrą, jei tetraedro briauna lygi 2 cm.

63*. Duota taisyklingoji trikampė piramidė $ABCD$, kurios pagrindo kraštinė lygi 30 cm, o šoninė briauna — 25 cm. Nubraižykite piramidės pjūvį plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai ir einančia per šoninės briaunos AD tašką E, jei žinoma, kad $DE : EA = 2 : 3$. Apskaičiuokite gauto pjūvio perimetrą.

64. a) Stačiojo lygiašonio trikampio ABC statinis AC yra plokštumoje α, o įžambinė BC pasvirusi į tą plokštumą 30° kampu. Raskite kampą tarp plokštumų ABC ir α.

b) Stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė yra plokštumoje α, o statinis pasviręs į tą plokštumą 30° kampu. Raskite kampą tarp plokštumos α ir trikampio ABC plokštumos.

65. Taškas M yra dvisienio kampo viduje. Raskite atstumą nuo to taško iki dvisienio kampo briaunos, jeigu:

a) dvisienio kampo didumas lygus 60°, o taškas M nuo dvisienio kampo sienų nutolęs 1,5 dm atstumu;

b) dvisienio kampo didumas lygus 120°, o taškas M nuo dvisienio kampo sienų nutolęs 6 dm atstumu.

66. a) Popieriaus lape nubraižyti du lygiašoniai trikampiai ABC ir ABD, kurių pagrindas AB bendras, o kampai prie viršūnių C ir D atitinkamai lygūs 90° ir 120°. Kokiu kampu reikia sulenkti lapą per tiesę AB, kad statmens, nubrėžto iš taško C į trikampio ABD plokštumą, pagrindas sutaptų su tašku D?

b) Du lygiašoniai statieji trikampiai turi bendrą įžambinę $AB = 9$ cm. Tų trikampių plokštumos tarpusavyje statmenos. Apskaičiuokite atstumą tarp trikampių stačiųjų kampų viršūnių.

67. Apskaičiuokite taisyklingosios keturkampės piramidės dvisienio kampo prie pagrindo didumą, jei:

a) pagrindo kraštinė lygi 4 m, o piramidės aukštinė lygi 2 m;

b) pagrindo kraštinė lygi 65 cm, o piramidės aukštinė lygi 121 cm.

(Atsakymą suapvalinkite laipsnio tikslumu.)

68. Stačiosios trikampės prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio vienas statinis lygus 8 dm, o įžambinė lygi 10 dm. Prizmės aukštinė lygi 6,4 dm. Per prizmės apatinio pagrindo įžambinę ir viršutinio pagrindo stačiojo kampo viršūnę nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite kampą (1° tikslumu) tarp pjūvio plokštumos ir apatinio pagrindo plokštumos.

69. Apskaičiuokite tetraedro dvisienių kampų didumus.

70. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 2 cm, o šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite kampo tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos tangentą.

71. Stačiojo trikampio vienas smailusis kampas lygus 28°, o statinis prie jo yra 24,2 cm ilgio. Apskaičiuokite:

a) kito statinio ir įžambinės ilgius;

b) trikampio plotą.

72. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 > 4$; b) $x^2 \leqslant 4$; c) $x^2 + 4x \leqslant 0$; d) $x^2 > 4x$.

73. Kateris nuplaukė upe prieš srovę 12 km ir pasroviui 5 km per tą laiką, kurio būtų reikėję nuplaukti 18 km atstumą ežere. Koks katerio greitis ežere, jeigu upės tėkmės greitis lygus 3 km/h?

74. Skaičių m ir n sandaugą ir dalmenį parašykite standartine išraiška, jei $m = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$, $n = 9{,}2 \cdot 10^{-1}$.

75. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}$, kai $x = -6\frac{1}{4}$; b) $\frac{x^2-8x+16}{x-4}$, kai $x = -4\frac{1}{5}$.

76. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -x^2 - x + 2$ grafiką ir pagal jį raskite:

a) funkcijos $f(x)$ didžiausią reikšmę;
b) x reikšmes, su kuriomis $f(x) > 0$; su kuriomis $f(x) < 0$;
c) x reikšmių intervalą, kuriame funkcija $f(x)$ didėja;
d) x reikšmes, su kuriomis $f(x) = -4$.

77. Suprastinkite reiškinį:

a) $\left(\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2}\right) \cdot \frac{y-2}{8y+2}$; b) $\left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x}{x+3}\right) : \frac{x+1}{x+3}$.

78. Moneta metama tris kartus, kiekvieną kartą užrašant, kuria puse ji atvirsta.

a) Surašykite visas baigtis, kai herbas atvirsta ne mažiau kaip du kartus.
b) Kokia tikimybė, kad herbas atvirs ne mažiau kaip du kartus?

79. Prekės didmeninė kaina yra 120 Lt, o parduotuvė prideda 35% antkainį.

a) Kokia prekės mažmeninė kaina?
b) Pardavus prekę 18% prekės kainos be PVM atitenka valstybei (tai vadinamasis PVM mokestis). Kiek litų prekės kainos atiteko valstybei, pardavus prekę?
c) Kiek litų pajamų turi parduotuvė, pardavusi dešimt tokių prekių ir sumokėjusi PVM?
d) Kiek litų pelno turi parduotuvė, pardavusi dešimt tokių prekių ir sumokėjusi PVM, jeigu prekybos išlaidos vienai prekei parduoti sudaro 80% pajamų, gautų ją pardavus?
e) Kiek litų grynojo pelno turi parduotuvė, pardavusi dešimt tokių prekių, jeigu pelno mokesčio tarifas yra 24%?

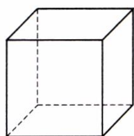
80. Išspręskite lygtį:

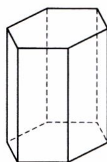
a) $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$; b) $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1$.

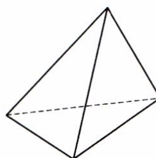
81. Trikampio kraštinių ilgiai yra išreikšti sveikaisiais skaičiais. Yra žinoma, kad šio trikampio viena kraštinė lygi 5 cm, o kita — 1 cm. Kam lygi trečioji trikampio kraštinė?

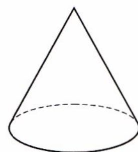
4 Erdvinių kūnų vaizdavimas plokštumoje. Statmenasis projektavimas

Brėžinyje pavaizduoti keli erdviniai kūnai.


Kubas

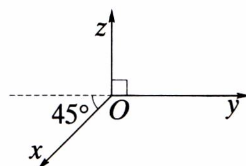

Taisyklingoji šešiakampė prizmė


Tetraedras


Kūgis

Kaip žinome, kubo visos sienos yra kvadratai, taisyklingosios šešiakampės prizmės šoninės sienos yra stačiakampiai, o pagrindai — taisyklingieji šešiakampiai, tetraedro — lygiakraščiai trikampiai, kūgio pagrindas yra skritulys. Matome, kad brėžinyje tik dvi kubo sienos vaizduojamos kvadratais, likusios keturios — lygiagretainiais; taisyklingosios šešiakampės prizmės tik dvi šoninės sienos vaizduojamos stačiakampiais (kitos — lygiagretainiais), o pagrindai — netaisyklingaisiais šešiakampiais; tetraedro sienos vaizduojamos netaisyklingaisiais trikampiais; kūgio pagrindas vaizduojamas *elipse*.
Kad erdvinių kūnų brėžiniai plokštumoje būtų vaizdūs, tenka kai kuriuos kūnų elementus vaizduoti ne natūralaus dydžio.
Panašiai kaip plokštumoje, taip ir erdvėje pasirenkame koordinačių sistemą.

Vadinamąją erdvės stačiakampę koordinačių sistemą sudaro trys tarpusavyje statmenos ašys, turinčios bendrą tašką. Plokštumoje tos ašys dažniausiai vaizduojamos taip:

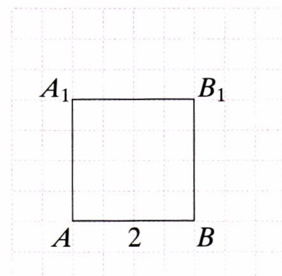


Erdvės stačiakampę koordinačių sistemą galima įsivaizduoti žiūrint į kambario kampą.
Braižant briaunainius jų sienos, lygiagrečios yOz plokštumai, vaizduojamos natūralaus dydžio, o briaunos, lygiagrečios Ox ašiai, vaizduojamos dvigubai trumpesnėmis atkarpomis. Lygiagrečios briaunainių briaunos vaizduojamos lygiagrečiomis atkarpomis.

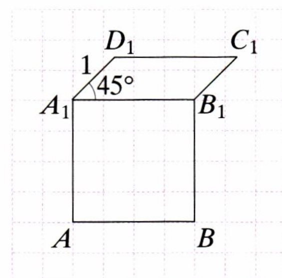
1 PAVYZDYS. Pavaizduokime kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briauna lygi 2 cm.

Pasirenkame kubo sienas, kurios bus lygiagrečios plokštumai yOz. Jas vadinkime priekine ir užpakaline.

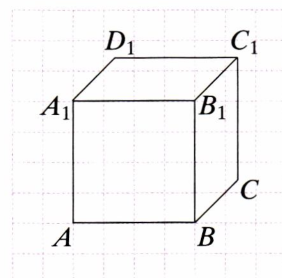
1) Braižome priekinę kubo sieną.
Ją vaizduojame kvadratu ABB_1A_1, kurio kraštinė yra realaus dydžio, t. y. $AB = 2$ cm.



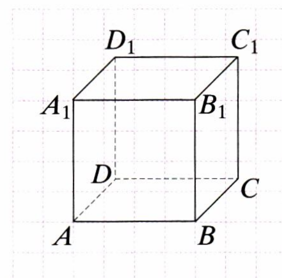
2) Braižome viršutinę kubo sieną.
Ją vaizduojame lygiagretainiu $A_1B_1C_1D_1$. Viena jo kraštinė A_1B_1 jau nubraižyta, kita kraštinė — A_1D_1 braižoma dvigubai trumpesnė (lygi 1 cm), o kampas tarp tų kraštinių yra 45°.



3) Braižome dešiniąją kubo sieną.
Ją vaizduojame lygiagretainiu BCC_1B_1. Dvi jo kraštinės jau nubraižytos. Todėl brėžiame, pavyzdžiui, kraštinę $BC \parallel B_1C_1$ ($BC = B_1C_1$) ir sujungiame taškus C ir C_1.



4) Belieka nubraižyti nematomas kubo briaunas.
Brėžiame, pavyzdžiui, briauną $D_1D \parallel A_1A$ ($D_1D = A_1A$) ir sujungiame taškus A ir D bei C ir D. (Nematomos briaunos braižomos brūkšninėmis linijomis.)

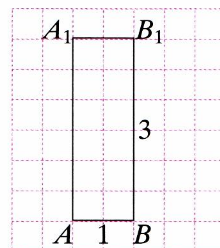


Pastaba. Kai brėžinyje reikia pavaizduoti kubo įstrižaines, tai kubas vaizduojamas kampą tarp Ox ir Oy ašių imant ne 45°, o 30°. Tai daroma tam, kad įstrižainė (mūsų atveju AC_1) nesusilietų su briaunomis AD ir B_1C_1.

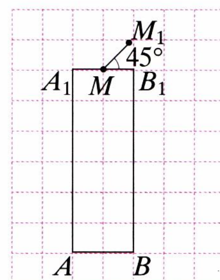
1 užduotis. Nubraižykite taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi 1 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp lygiagrečių to šešiakampio kraštinių ir didžiausios įstrižainės ilgį.

2 PAVYZDYS. Nubraižykime taisyklingąją šešiakampę prizmę $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, kurios pagrindo kraštinė lygi 1 cm, o aukštinė — 3 cm.

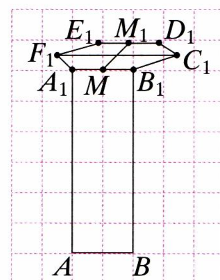
1) Nubraižome vieną prizmės sieną ABB_1A_1. (Laikykime ją priekine, lygiagrečia yOz plokštumai.) Ją braižome realaus dydžio: $AB = 1$ cm, $BB_1 = 3$ cm.



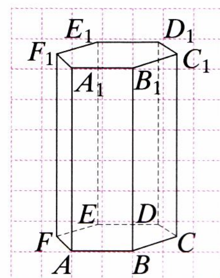
2) Per briaunos A_1B_1 vidurio tašką M brėžiame spindulį, su tiese A_1B_1, sudarantį 45° kampą. Tame spindulyje atidedame atkarpą, dvigubai trumpesnę negu atstumas tarp taisyklingojo šešiakampio (prizmės pagrindo) lygiagrečių kraštinių: $MM_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



3) Per atkarpos MM_1 vidurio tašką brėžiame didžiąją viršutinio pagrindo įstrižainę $C_1F_1 = 2$ cm, lygiagrečią A_1B_1. Ši įstrižainė braižoma realaus ilgio, o atkarpos MM_1 vidurio taškas yra ir atkarpos C_1F_1 vidurio taškas. Per tašką M_1 brėžiame briauną D_1E_1, lygiagrečią ir lygią briaunai A_1B_1, taip, kad $D_1M_1 = M_1E_1$. Sujungiame taškus E_1 ir F_1, F_1 ir A_1, B_1 ir C_1, C_1 ir D_1 atkarpomis. Gavome viršutinį prizmės pagrindą $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



4) Papildome brėžinį iki prizmės.



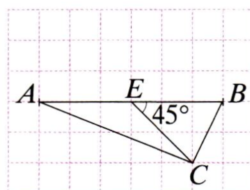
2 užduotis. Apskaičiuokite tetraedro, kurio briauna lygi 3 cm, aukštinės ilgį ir apotemos (šoninės sienos aukštinės) ilgį (0,1 cm tikslumu).

3 PAVYZDYS. Pavaizduokime tetraedrą, kurio briauna lygi 3 cm.

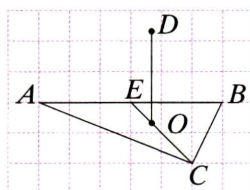
1) Pasirenkame tetraedro pagrindo kraštinę, lygiagrečią yOz plokštumai ir nubrėžiame ją natūralaus dydžio, t. y. $AB = 3$ cm.



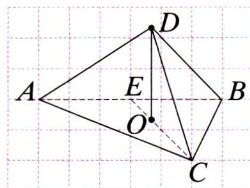
2) Per kraštinės AB vidurio tašką E brėžiame spindulį, su tiese AB sudarantį 45° kampą. Jame atidedame atkarpą, dvigubai trumpesnę negu pagrindo aukštinė, t. y. $EC = \frac{2{,}6}{2} = 1{,}3$ (cm). Taškus A ir C, B ir C sujungę atkarpomis, gauname tetraedro pagrindo vaizdą.



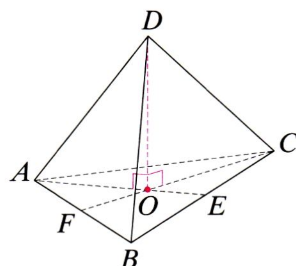
3) Iš atkarpos EC taško O ($EO = \frac{1}{3}EC$) iškeliame statmenį trikampio ABC plokštumai ir jame atidedame atkarpą OD, kurios ilgis lygus tetraedro aukštinės ilgiui, t. y. $\sqrt{6} \approx 2{,}4$ (cm).



4) Tašką D sujungę su taškais A, B ir C atkarpomis, gauname tetraedro vaizdą stačiakampėje koordinačių sistemoje.

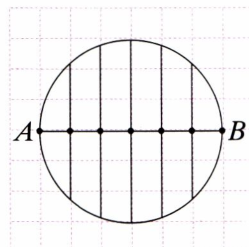


Pastaba. Sprendžiant uždavinius ar įrodinėjant teoremas brėžinio tikslumas yra nebūtinas. Svarbesnis yra brėžinio vaizdumas. Todėl tetraedras ar bet kokios trikampės piramidės pagrindas vaizduojamas bet kokiu trikampiu. Jeigu vaizduojama *taisyklingoji piramidė* ar tetraedras — iš pagrindo pusiaukraštinių susikirtimo taško iškeliama statmuo — piramidės aukštinė (ilgis nesvarbu).

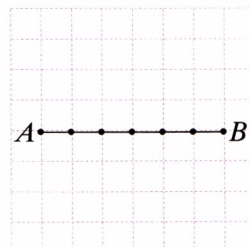


4 PAVYZDYS. Pavaizduokime kūgį, kurio pagrindo spindulys lygus 1,5 cm, o aukštinė — 2,5 cm.

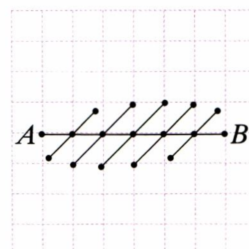
1) Nubraižykime pagalbinį apskritimą, kurio spindulys lygus 1,5 cm. Nubrėžkime jo skersmenį AB. Tą skersmenį padalykime į keletą lygių dalių (pavyzdžiui, 6). Per dalijimo taškus nubrėžkime stygas, statmenas skersmeniui AB.



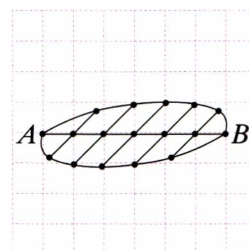
2) Remdamiesi šiuo brėžiniu braižome kūgio pagrindą. Brėžiame kūgio pagrindo skersmenį $AB = 3$ cm. Pagrindo skersmenį padalijame į tiek lygių dalių, į kiek jų dalijome pagalbinio apskritimo skersmenį.



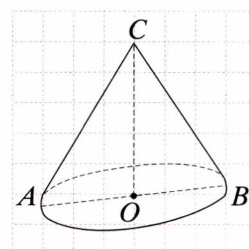
3) Per dalijimo taškus brėžiame tieses, su skersmeniu sudarančias 45° kampus. Tose tiesėse atidedame atkarpas, dvigubai trumpesnes už atitinkamas pagalbinio apskritimo stygas. (Pagrindo skersmuo AB tas atkarpas turi dalyti pusiau.)



4) Per nubrėžtų atkarpų galus brėžiame glodžią kreivę. Gautoji kreivė vadinama elipse.



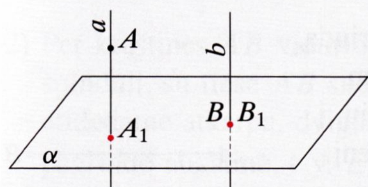
5) Iš pagrindo skersmens AB vidurio taško brėžiame kūgio aukštinę $OC = 2{,}5$ cm. Nubraižome dvi kūgio sudaromąsias AC ir BC.



Pastaba. Toks kūgio pagrindo vaizdas yra apytikslis, bet jis patogus vaizduojant sukinius, sprendžiant stereometrijos uždavinius.

Vaizduojant erdvinius kūnus plokštumoje dažnai naudojamasi statmenuoju (ortogonaliuoju) projektavimu.

Sakykime, kad erdvėje duota plokštuma α (projekcijų plokštuma). Paimkime bet kurį erdvės tašką A, nepriklausantį plokštumai α. Per tą tašką brėžkime tiesę a, statmeną plokštumai α. Ji plokštumą α kerta taške A_1. Taškas A_1 vadinamas taško A *statmenąja projekcija* plokštumoje α. Jeigu taškas B priklauso projekcijų plokštumai α, jo statmenoji projekcija B_1 sutampa su tašku B.

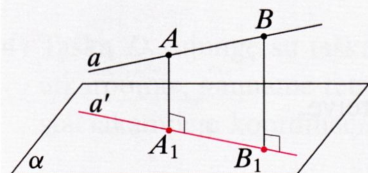


$A \notin \alpha$, $a \perp \alpha$, $A \in a$, $a \cap \alpha = A_1$,
A_1 — taško A statmenoji projekcija.

Figūros statmenąja projekcija vadiname tos figūros visų taškų statmenųjų projekcijų aibę (visumą).

Braižydami įvairių figūrų statmenąsias projekcijas naudosimės statmenojo projektavimo savybėmis:

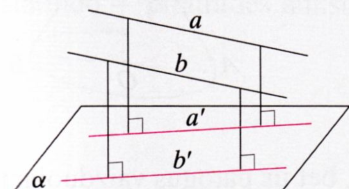
1) Tiesės, nestatmenos projekcijų plokštumai, projekcija yra tiesė (atkarpos projekcija yra atkarpa).



Tiesė a — nestatmena plokštumai α.
$AB \subset a$, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$,
A_1B_1 — atkarpos AB projekcija plokštumoje α.
$A_1B_1 \subset a'$. Tiesė a' — tiesės a projekcija plokštumoje α.

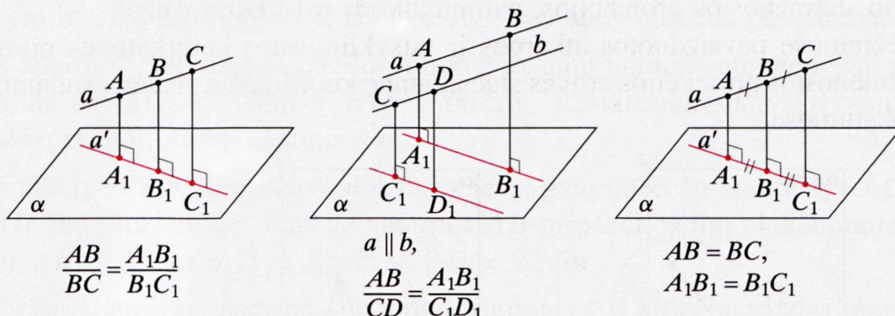
Ieškant tiesės a projekcijos a' plokštumoje α pakanka rasti dviejų tiesei a priklausančių taškų projekcijas plokštumoje α ir per juos nubrėžti tiesę. Jei tiesė a yra pasviroji plokštumai α, tai pakanka rasti bet kurio tiesės a taško, nesutampančio su tiesės ir plokštumos susikirtimo tašku, projekciją ir per jį bei tiesės ir plokštumos susikirtimo tašką brėžti tiesę.

2) Lygiagrečių tiesių, nestatmenų projekcijų plokštumai, statmenosios projekcijos yra lygiagrečios tiesės.



Tiesės a ir b — nestatmenos plokštumai α, a' ir b' — tiesių a ir b statmenosios projekcijos plokštumoje α.
Jei $a \parallel b$, tai $a' \parallel b'$.

3) Atkarpų, esančių vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, ilgių santykis lygus tų atkarpų projekcijų ilgių santykiui. Atskiru atveju atkarpos vidurio taško statmenoji projekcija yra tos atkarpos projekcijos vidurio taškas.



$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ $\qquad$ $a \parallel b$, $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ $\qquad$ $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$

Apibendrinant galima pastebėti, kad statmenasis projektavimas išlaiko *lygiagretumą* ir *atkarpų santykį* (vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse), bet neišlaiko atkarpų ilgių ir kampų didumų.

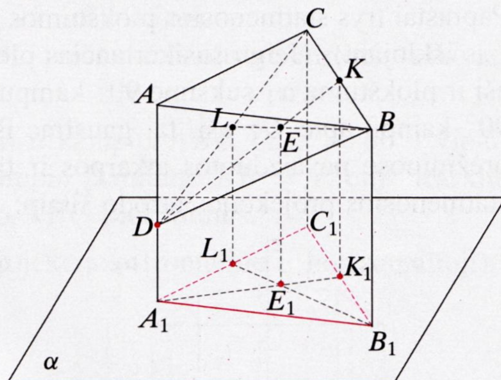
UŽDAVINYS. Stačiosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ briaunoje AA_1 pažymėtas taškas D.

1) Raskite trikampio DBC statmenąją projekciją plokštumoje $A_1B_1C_1$.

2) Įrodykite, kad trikampio DBC pusiaukraštinių susikirtimo taško E statmenoji projekcija yra trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

Sprendimas.

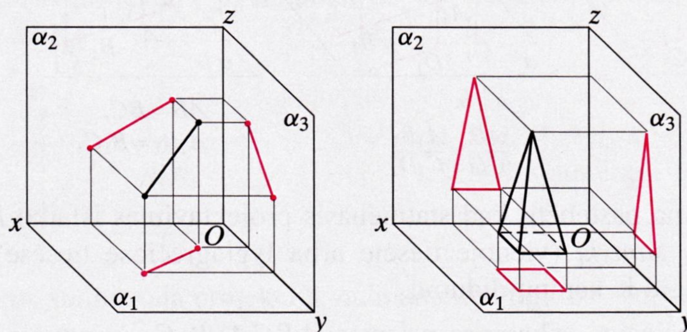
1) Kadangi taškai A_1, B_1 ir C_1 yra taškų D, B ir C statmenosios projekcijos plokštumoje α, tai atkarpų CD, DB ir BC projekcijos plokštumoje α yra atkarpos C_1A_1, A_1B_1 ir B_1C_1. Vadinasi, trikampio DBC statmenoji projekcija plokštumoje α yra trikampis $A_1B_1C_1$.



2) Nubraižykime trikampio DBC pusiaukraštines DK ir BL. Kadangi atkarpos DC vidurio taško L projekcija yra atkarpos A_1C_1 vidurio taškas L_1, o atkarpos BC vidurio taško K projekcija yra atkarpos B_1C_1 vidurio taškas K_1, tai trikampio DBC pusiaukraštinių DK ir BL projekcijos yra trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės A_1K_1 ir B_1L_1. Pusiaukraštinių DK ir BL susikirtimo taško E projekcija yra pusiaukraštinių A_1K_1 ir B_1L_1 susikirtimo taškas E_1. Pastebėsime, kad $\frac{DE}{EK}=\frac{A_1E_1}{E_1K_1}=2$.

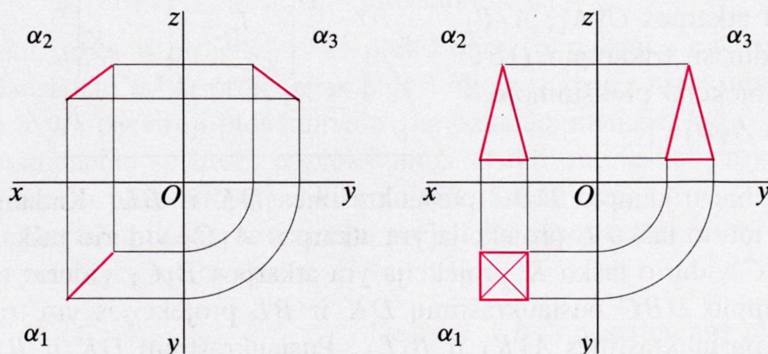
Braižyboje dažnai braižomos kokio nors kūno statmenosios (ortogonaliosios) projekcijos trijose tarpusavyje statmenose plokštumose xOy, xOz ir yOz (erdvės stačiakampėje koordinačių sistemoje). Kita vertus, kai žinomos trys kūno statmenosios projekcijos, galima atkurti ir to kūno vaizdą.

Brėžiniuose pavaizduotos atkarpos ir taisyklingosios keturkampės piramidės statmenosios projekcijos erdvės stačiakampę koordinačių sistemą sudarančiose plokštumose.



Plokštumoje α_1 (xOy) gautas vaizdas vadinamas *vaizdu iš viršaus*, arba *horizontaliąja* projekcija. Plokštumoje α_2 (xOz) gautas vaizdas vadinamas *vaizdu iš priekio*, arba *frontaline* projekcija, o vaizdas plokštumoje α_3 (yOz) — *vaizdu iš šono*, arba *profiline* projekcija.

Paprastai trys statmenosios plokštumos yra vaizduojamos vienoje plokštumoje (jas išklojant). (Jeigu susikertančias plokštumas α_1 ir α_3 perkirpsime per Oy ašį ir plokštumą α_1 suksime 90° kampu apie Ox ašį, o plokštumą α_3 suksime 90° kampu apie Oz ašį, tai gausime išklotinę, vadinamą *epiūrą*.) Aukščiau brėžiniuose pavaizduotos atkarpos ir taisyklingosios keturkampės piramidės statmenosios projekcijos atrodo šitaip:



Jei kūnai nesudėtingi, tai dažnai braižomos tik dvi projekcijos — frontalinė ir horizontalioji.

Pratimai ir uždaviniai

82. Atkarpa AB kerta plokštumą α. Raskite šios atkarpos projekcijos plokštumoje α ilgį, jei $AB = 15$ cm, o atkarpos galai nuo plokštumos α nutolę 3 cm ir 6 cm atstumais. Ar atkarpa AB gali būti statmena plokštumai α?

83. Iš atkarpos AB, nesančios plokštumoje α, galų nubrėžti statmenys plokštumai α: $AC = 80$ cm ir $BD = 60$ cm. Raskite atkarpos AB vidurio taško nuotolį nuo plokštumos α.

84. Iš atkarpos AB, nesančios plokštumoje α, galų nubrėžti statmenys AC ir BD šiai plokštumai. Raskite atkarpos AB projekcijos ilgį plokštumoje α, jei $AB = 26$ cm, $AC = 32$ cm ir $BD = 22$ cm.

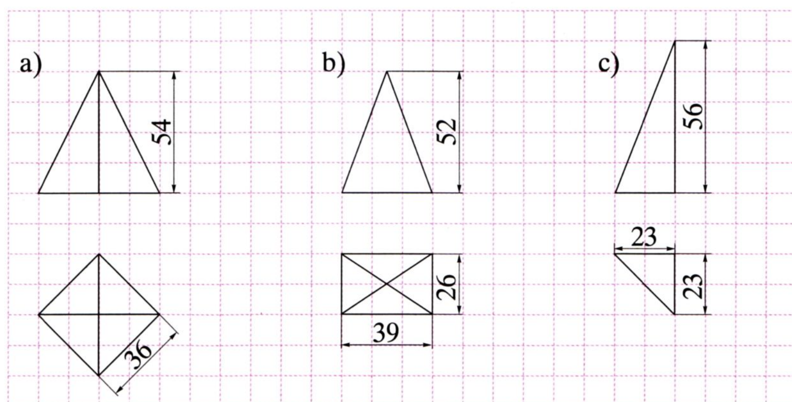
85. Vienas trapecijos pagrindas yra plokštumoje α, o kitas pagrindas nutolęs nuo tos plokštumos 4 dm atstumu. Raskite atstumą nuo trapecijos įstrižainių susikirtimo taško iki plokštumos α, jei $AB : DC = 5 : 3$ (AB ir DC — trapecijos pagrindai).

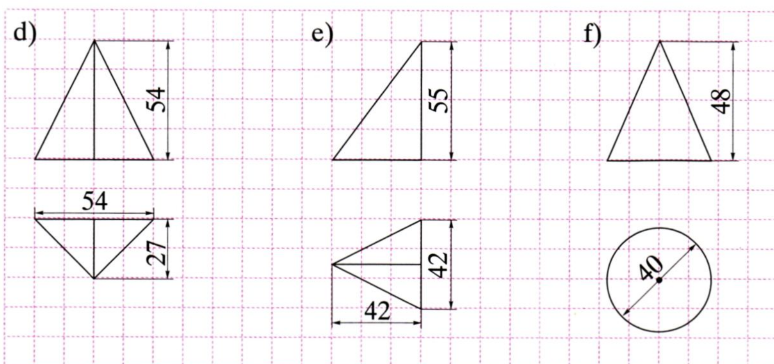
86. Viena rombo kraštinė yra plokštumoje α, o kita — lygiagreti plokštumai α ir nutolusi nuo jos 16 cm atstumu. Rombo įstrižainių projekcijos plokštumoje α lygios 8 cm ir 32 cm. Raskite rombo perimetrą.

87. Trikampis ABC nepriklauso plokštumai α. Atstumai nuo šio trikampio viršūnių iki plokštumos α lygūs:
a) 4 dm, 5 dm ir 6 dm; b) 20 cm, 25 cm ir 45 cm.
Raskite atstumą nuo trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taško iki plokštumos α.

88. Taškas D nuo kiekvienos stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) viršūnės nutolęs 10 cm atstumu. Trikampio įžambinė $AB = 12$ cm. Raskite atstumą nuo taško D iki trikampio ABC plokštumos.

89. Pavaizduotos erdvinio kūno dvi projekcijos (frontalinė ir horizontalioji).





1) Nubraižykite trečiąją (profilinę) projekciją ir pavaizduokite patį erdvinį kūną.
2) Apskaičiuokite to erdvinio kūno tūrį.

100. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\sqrt{9-x^2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; c) $\frac{1}{9-x^2}$; d) $\frac{2}{9+x^2}$.

101. Vienas skaičius penkiais vienetais mažesnis už kitą. Didesniojo skaičiaus kvadrato ir mažesniojo skaičiaus skirtumas lygus 85. Raskite tuos skaičius.

102. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę: a) $25^5 \cdot 5^{-12} : 5^{-2}$; b) $\left(2^{-3}\right)^5 \cdot 4^9$.

103. Suprastinkite trupmeną:

a) $\frac{9x-18}{3x^2-4x-4}$; b) $\frac{5x^2-14x-3}{x^2-3x}$.

104. a) Kiek galima sudaryti skirtingų penkiaženklių skaičių, kuriuose skaitmenys nesikartoja ir visi skaitmenys yra nelyginiai?
b) Kam lygi tikimybė, kad iš visų a) punkte sudarytų skaičių atsitiktinai paimtas skaičius bus mažesnis už likusius?

105. Kiek litų reikės grąžinti skolintojui po 5 metų, jei pasiskolinta 20 000 Lt penkeriems metams su 10 procentų metinių:

a) paprastųjų palūkanų; b) sudėtinių palūkanų?

106. Kvadratinės lygties $x^2 + bx - 32 = 0$ didesnysis sprendinys $x_2 = 8$. Raskite:

a) x_1; b) b; c) $x_2 - x_1$; d) $\frac{x_2}{x_1}$; e) $x_1^2 + x_2^2$.

107. Išspręskite nelygybę:

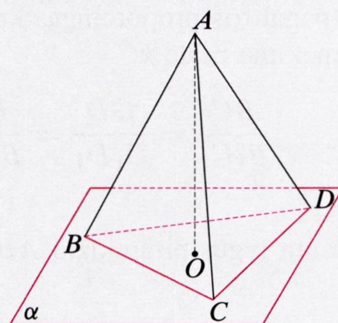
a) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{x+1} \leqslant 0$; b) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-x-12} \geqslant 0$.

108. Kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius 3^{100}?

109. Vaidotas gimė 1985 m. balandžio 26 d. Prieš kiek dienų tai buvo?

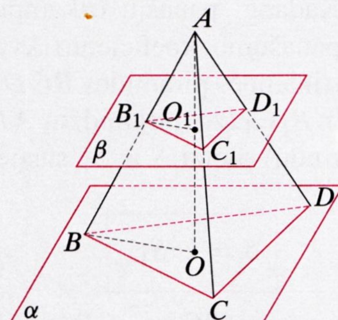
5 Nupjautinė piramidė

Brėžinyje pavaizduota trikampė piramidė $ABCD$, kurios viena siena (BCD) yra plokštumoje α; AO – piramidės aukštinė.



? Ką vadiname piramide?
Kam lygus piramidės tūris?

Kirskime pavaizduotąją piramidę plokštuma β, lygiagrečia plokštumai α. Plokštuma β piramidę $ABCD$ dalija į dvi dalis – piramidę $AB_1C_1D_1$ (viena jos siena $B_1C_1D_1$ yra plokštumoje β; AO_1 – aukštinė) ir kitą dalį $BCDB_1C_1D_1$, kuri vadinama *nupjautine trikampe piramide* (BCD ir $B_1C_1D_1$ – pagrindai; B_1C_1CB, C_1D_1DC, B_1D_1DB – šoninės sienos; OO_1 – aukštinė).



Pastebėkime, kad nupjautinės piramidės pagrindų atitinkamos kraštinės yra lygiagrečios: $BC \parallel B_1C_1$, nes BC ir B_1C_1 yra lygiagrečių plokštumų α ir β tiesės, gautos tas plokštumas kertant plokštuma ABC.
Analogiškai $CD \parallel C_1D_1$ ir $BD \parallel B_1D_1$.

? Kokia keturkampių, sudarančių nupjautinės piramidės šoninį paviršių, rūšis?
Paaiškinkite, kodėl $BO \parallel B_1O_1$.

Įrodysime, kad nupjautinės trikampės piramidės pagrindai yra panašūs trikampiai, t. y. $\triangle BCD \backsim \triangle B_1C_1D_1$.

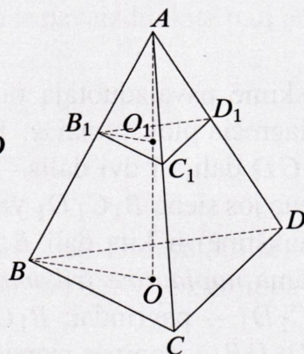
? Kokie trikampiai vadinami panašiais?
Išvardykite trikampių panašumo požymius.

Kadangi $BO \parallel B_1O_1$, tai $\frac{AO}{AO_1} = \frac{AB}{AB_1}$
(taikome Talio teoremą trikampiui ABO).
Kadangi $BC \parallel B_1C_1$, tai $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AB_1}$
(taikome Talio teoremos išvadą trikampiui ABC).
Iš paskutiniųjų dviejų lygybių gauname, kad $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AO}{AO_1}$.

Analogiškai įrodoma, kad $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AO}{AO_1}$ ir $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AO}{AO_1}$.
Vadinasi, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$. O tai reiškia, kad $\triangle BCD \backsim \triangle B_1C_1D_1$ (pagal tris proporcingas kraštines). Tų trikampių panašumo koeficientą pažymėkime raide k:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = k.$$

? Kam lygus piramidžių $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$ aukštinių ilgių santykis?



Kadangi panašių trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui, tai nupjautinės trikampės piramidės $BCDB_1C_1D_1$ pagrindų BCD ir $B_1C_1D_1$ (piramidžių $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$ pagrindų) plotai S ir S_1 susiję lygybe

$$S = k^2S_1$$

čia $k = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AO}{AO_1}$.
Piramidžių $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$ tūriai V ir V_1 susiję lygybe

$$V = k^3V_1$$

Iš tikrųjų, $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot k^2S_1 \cdot kAO_1 = k^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot AO_1 = k^3V_1$.

Nupjautinės piramidės $BCDB_1C_1D_1$ tūris V_{nup} su piramidės $AB_1C_1D_1$ tūriu susiję lygybe

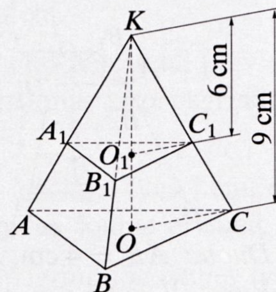
$$V_{\text{nup}} = (k^3 - 1)V_1$$

Iš tikrųjų, $V_{\text{nup}} = V - V_1 = k^3V_1 - V_1 = (k^3 - 1)V_1$.

Užduotis. Įsitikinkite, kad nupjautinės piramidės $BCDB_1C_1D_1$ ir piramidės $ABCD$ tūrius V_{nup} ir V sieja lygybė

$$V_{\text{nup}} = \frac{k^3-1}{k^3}V$$

1 UŽDAVINYS. Taisyklingoji trikampė piramidė, kurios pagrindo briauna lygi 6 cm, o aukštinė 9 cm, perkirsta plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai ir nuo viršūnės nutolusia 6 cm. Raskite, į kokio tūrio dalis ši plokštuma dalija piramidę.



Duota: $AB = 6\,\text{cm}$, $KO = 9\,\text{cm}$, $KO_1 = 6\,\text{cm}$.
Rasti: $V_{KA_1B_1C_1}$, $V_{ABCA_1B_1C_1}$.
Sprendimas. Apskaičiuokime

$$V_{KABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot KO.$$

Kadangi piramidė yra taisyklingoji, tai jos pagrindas $\triangle ABC$ yra lygiakraštis.

$$S_{ABC} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\,(\text{cm}^2);$$
$$V_{KABC} = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 9 = 27\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

Remdamiesi formule $V_{KABC} = k^3 V_{KA_1B_1C_1}$, kur $k = \frac{KO}{KO_1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, randame

$$V_{KA_1B_1C_1} = \frac{V_{KABC}}{k^3} = \frac{27\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = 8\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

Apskaičiuojame

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{KABC} - V_{KA_1B_1C_1} = 27\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 19\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

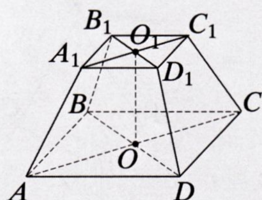
Pastaba. Nupjautinės piramidės tūrį $V_{ABCA_1B_1C_1}$ galėjome apskaičiuoti ir remdamiesi formulėmis:

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = (k^3 - 1)V_{KA_1B_1C_1} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1\right) \cdot 8\sqrt{3} = 19\sqrt{3}\,(\text{cm}^3),$$

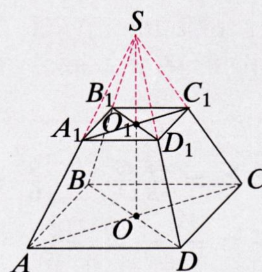
$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{(k^3 - 1)}{k^3}V_{KABC} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \cdot 27\sqrt{3} = 19\sqrt{3}\,(\text{cm}^3).$$

Atsakymas. Plokštuma duotąją piramidę dalija į dvi dalis: nupjautinę piramidę, kurios tūris $19\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, ir piramidę, kurios tūris $8\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

2 UŽDAVINYS. Brėžinyje pavaizduota nupjautinė keturkampė piramidė, kurios pagrindai stačiakampiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, o aukštinė OO_1. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį, jei $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 6\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 2\,\text{cm}$, $A_1D_1 = 3\,\text{cm}$, $OO_1 = 4\,\text{cm}$.



Duota: $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 6\,\text{cm}$, $A_1B_1 = 2\,\text{cm}$, $A_1D_1 = 3\,\text{cm}$, $OO_1 = 4\,\text{cm}$.
Rasti: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.
Sprendimas. Pratęskime piramidės aukštinę OO_1 ir šonines briaunas AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1. Jos susikerta taške S.



Sakykime, kad $SO_1 = x$. Tuomet $\frac{SO}{SO_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$, t. y. $\frac{x+4}{x} = \frac{4}{2} = 2$. Iš čia: $x = 4\,\text{cm}$. Taigi, $k = 2$.

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = (k^3 - 1)V_{SA_1B_1C_1D_1} =$$
$$= (k^3 - 1) \cdot \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot SO_1 =$$
$$= (2^3 - 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 56\,(\text{cm}^3).$$

Atsakymas. $56\,\text{cm}^3$.
Pastaba. Nupjautinės piramidės tūrį galima apskaičiuoti remiantis formule:

$$V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right) \cdot H$$

čia S ir S_1 — nupjautinės piramidės pagrindų plotai, o H — nupjautinės piramidės aukštinės ilgis.
Remdamiesi šia formule apskaičiuokime antrajame uždavinyje nagrinėtos piramidės tūrį: $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\left(6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + \sqrt{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}\right) \cdot 4 = 56\,(\text{cm}^3)$.

Pratimai ir uždaviniai

110. Plokštuma, lygiagreti piramidės pagrindui, dalija piramidės aukštinę santykiu 3 : 5 imant nuo viršūnės. Apskaičiuokite piramidės pagrindo plotą, jeigu pjūvio plotas 275 cm^2 mažesnis už pagrindo plotą.

111. Piramidės pagrindo plotas lygus 150 cm^2, o lygiagretaus pagrindui pjūvio plotas yra 54 cm^2. Raskite piramidės tūrį, jeigu atstumas tarp pagrindo plokštumos ir pjūvio plokštumos lygus 14 cm.

112. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 7 cm, o pagrindų kraštinės yra 10 cm ir 2 cm. Raskite piramidės šoninę briauną.

113. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės lygios 4 cm ir 68 cm, o aukštinė yra 24 cm. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

114. Piramidės pagrindo plotas lygus 98 cm^2, o aukštinė — 14 cm. Piramidė kertama plokštuma, lygiagrečia pagrindui. Pjūvio plotas lygus 32 cm^2. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

115. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios 10 cm ir 16 cm, o aukštinė — $\sqrt{22}$ cm. Raskite piramidės:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą.

116. Koks taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės tūris, jei jos pagrindų kraštinės lygios 10 cm ir 16 cm, o šoninės sienos aukštinė lygi 5 cm?

117. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės šoninės sienos aukštinė lygi 15 cm, o šoninė briauna — 17 cm. Raskite piramidės pagrindus, jeigu jos šoninio paviršiaus plotas lygus 1320 cm^2.

118. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindai lygūs 18 cm ir 8 cm, o aukštinė yra 12 cm. Raskite viso paviršiaus plotą.

119. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų plotai yra 100 dm^2 ir 16 dm^2, o šoninė briauna lygi 5 dm. Raskite:
a) šoninio ir viso paviršiaus plotus; b) tūrį.

120. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės yra $2\sqrt{2}$ cm ir $5\sqrt{2}$ cm ilgio, o šoninė briauna į didžiojo pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α. Raskite nupjautinės piramidės tūrį. Apskaičiuokite tūrį, kai $\alpha = 46^\circ$.

121. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės yra $2\sqrt{3}$ cm ir $5\sqrt{3}$ cm ilgio, o šoninė briauna į didžiojo pagrindo plokštumą pasvirusi kampu α. Užrašykite formulę nupjautinės piramidės tūriui apskaičiuoti. Apskaičiuokite tūrį, kai $\alpha = 62^\circ$.

122. Išspręskite lygčių sistemą:

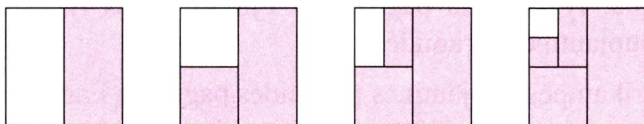
a) $\begin{cases} x + y + xy = -11, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - x^2 = 3, \\ x + y + x^2 = 5. \end{cases}$

123. Su kuriomis a reikšmėmis trinaris:
a) $2x^2 + x + a$ įgyja tik teigiamas reikšmes;
b) $-x^2 + 6x + a$ įgyja tik neigiamas reikšmes?

124. Įrodykite, kad trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga, padidinta viduriniuoju skaičiumi, yra lygi viduriniojo skaičiaus kubui.

125*. Iš Zapyškio į Kriūkus upe motorinė valtis nuplaukė per 2 valandas, o grįžo atgal per 3 valandas. Kiek laiko iš Zapyškio į Kriūkus plauktų plaustas?

126. Kvadratą, kurio kraštinė lygi 1 m, dažoma dalimis taip, kaip parodyta paveiksle (kiekvienu žingsniu nudažoma vis pusė nedažyto ploto). Kam lygi nenudažyta kvadrato dalis po 10-ojo žingsnio?



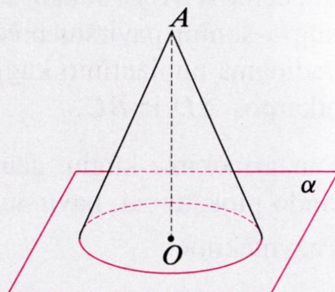
127. Lygiašonio trikampio vienas priekampių lygus $116°$. Raskite šio trikampio vidaus kampus.

128. Raskite visus trikampius, kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, ne didesni už 2.

129. Pirmosios atkarpos ilgis lygus $(9\sqrt{3} - 2)$ cm, o kiekvienos kitos vis $(2 - \sqrt{3})$ cm ilgesnis. Raskite:
a) dešimties pirmųjų atkarpų ilgių sumą;
b) dvylikos pirmųjų atkarpų ilgių sumą.

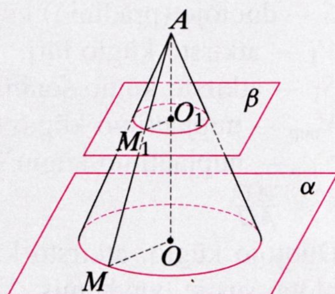
130. Parašykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų lygūs:
a) $-\sqrt{2}$ ir $\sqrt{3}$; b) $5 - \sqrt{5}$ ir $5 + \sqrt{5}$.

6 Nupjautinis kūgis



Brėžinyje pavaizduotas kūgis, kurio pagrindas yra plokštumoje α; OA — kūgio aukštinė.

? Koks kūnas vadinamas kūgiu?
Kaip gaunamas kūgis?
Ką vadiname kūgio sudaromąja?
Kam lygus kūgio tūris ir šoninio paviršiaus plotas?



Kirskime pavaizduotąjį kūgį plokštuma β, lygiagrečia plokštumai α. Matome, kad plokštuma β kūgį dalija į dvi dalis — kūgį, kurio pagrindas yra plokštumoje β (AO_1 — aukštinė), ir kitą dalį, kuri vadinama *nupjautiniu kūgiu* (O_1O vadinama nupjautinio kūgio aukštine).

Įsitikinkime, kad kūgį kirsdami plokštuma, lygiagrečia kūgio pagrindo plokštumai, pjūvyje gauname skritulį.
Nubrėžkime pradinio kūgio sudaromąją AM ir pagrindų spindulius OM ir O_1M_1. Pastebėkime, kad $OM \parallel O_1M_1$, nes OM ir O_1M_1 yra lygiagrečių plokštumų α ir β tiesės, gautos tas plokštumas kertant plokštuma AMO.
Kadangi $OM \parallel O_1M_1$, tai

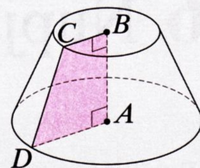
$$\frac{AO}{AO_1} = \frac{OM}{O_1M_1} \text{ (taikome Talio teoremos išvadą trikampiui } AOM\text{).}$$

Pažymėkime

$$\frac{AO}{AO_1} = k, \quad OM = r, \quad O_1M_1 = r_1.$$

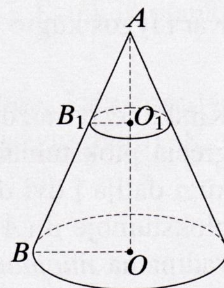
Tuomet $r = kr_1$. Iš čia $r_1 = \frac{r}{k}$. Vadinasi, kūgio šoninį paviršių plokštuma β kerta apskritimu, o kūgio ir tos plokštumos sankirta yra skritulys.
Pastebėkime, kad keturkampis OMM_1O_1 yra stačioji trapecija (OO_1 — jos šoninė kraštinė, statmena pagrindams).

Vadinasi, nupjautinį kūgį galima gauti stačiąją trapeciją sukant apie jos pagrindams statmeną šoninę kraštinę. Brėžinyje pavaizduotas nupjautinis kūgis, gautas stačiąją trapeciją $ABCD$ sukant apie kraštinę AB. Nupjautinio kūgio šoninį paviršių brėžia kraštinė CD (atkarpa CD vadinama nupjautinio kūgio sudaromąja), o pagrindus — atkarpos AD ir BC.



Panagrinėkime kūgių, gautų duotąjį kūgį kertant plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai, paviršių plotus ir tūrius.

Pažymėkime:



V — duotojo (pradinio) kūgio tūrį,
S — duotojo (pradinio) kūgio šoninio paviršiaus plotą,
V_1 — atkirsto kūgio tūrį,
S_1 — atkirsto kūgio šoninio paviršiaus plotą,
V_{nup} — nupjautinio kūgio tūrį,
S_{nup} — nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą,
$k = \frac{AO}{AO_1}$.

Duotojo kūgio, atkirsto kūgio ir nupjautinio kūgio tūriai ir šoninių paviršių plotai susiję lygybėmis:

$$V = k^3 V_1, \quad V_{\text{nup}} = (k^3-1)V_1, \quad V_{\text{nup}} = \frac{k^3-1}{k^3}V$$

$$S = k^2 S_1, \quad S_{\text{nup}} = (k^2-1)S_1, \quad S_{\text{nup}} = \frac{k^2-1}{k^2}S$$

Įrodykime, kad $V = k^3 V_1$.
Kadangi $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot AO$, o $OB = kO_1B_1$, $AO = kAO_1$, tai

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot k^2 \cdot O_1B_1^2 \cdot k \cdot AO_1 =$$
$$= k^3 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot O_1B_1^2 \cdot AO_1 =$$
$$= k^3 V_1.$$

Įrodysime, kad $V_{\text{nup}} = (k^3-1)V_1$.
Iš tikrųjų, $V_{\text{nup}} = V - V_1 = k^3V_1 - V_1 = (k^3-1)V_1$.

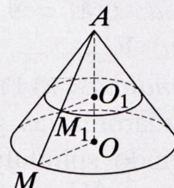
Užduotis. Likusias keturias formules įrodykite savarankiškai.

Sprendžiant uždavinius, susijusius su nupjautiniais kūgiais, nebūtina remtis šiomis formulėmis. Galima tiesiog naudotis tuo, kad $V_{nup} = V - V_1$, $S_{nup} = S - S_1$.

1 UŽDAVINYS. Kūgis, kurio pagrindo spindulys lygus 9 cm, o aukštinė — 12 cm, perkirstas plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai ir nuo viršūnės nutolusia 8 cm. Raskite:

a) dalių, į kurias kūgį dalija ši plokštuma, tūrius;

b) tų dalių šoninių paviršių plotus.



Duota: $AO = 12\,\text{cm}$, $AO_1 = 8\,\text{cm}$, $OM = 9\,\text{cm}$.

Rasti: a) V_1, V_{nup}; b) S_1, S_{nup}.

Sprendimas.

a) Apskaičiuojame

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot OM^2 \cdot AO = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi\ (\text{cm}^3).$$

Apskaičiuojame $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot O_1M_1^2 \cdot AO_1$.

Kadangi $\frac{AO}{AO_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$, tai $O_1M_1 = \frac{9 \cdot 8}{12} = 6\,(\text{cm})$.

Vadinasi,

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi\ (\text{cm}^3).$$

Randame $V_{nup} = V - V_1 = 324\pi - 96\pi = 228\pi\ (\text{cm}^3)$.

b) Apskaičiuojame $S_1 = \pi \cdot O_1M_1 \cdot AM_1$.

Iš stačiojo $\triangle AO_1M_1$ apskaičiuojame AM_1:

$AM_1 = \sqrt{AO_1^2 + O_1M_1^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,(\text{cm})$.

Vadinasi,

$$S_1 = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi\ (\text{cm}^2).$$

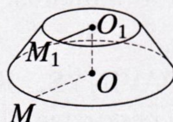
Apskaičiuojame $k = \frac{AO}{AO_1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ir remdamiesi formule $S_{nup} = (k^2 - 1)S_1$, gauname:

$$S_{nup} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right) \cdot 60\pi = 75\pi\ (\text{cm}^2).$$

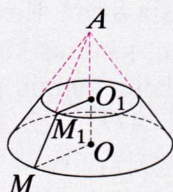
Atsakymas. a) $V_1 = 96\pi\ \text{cm}^3$, $V_{nup} = 228\pi\ \text{cm}^3$;

b) $S_1 = 60\pi\ \text{cm}^2$, $S_{nup} = 75\pi\ \text{cm}^2$.

2 UŽDAVINYS.



Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai yra $r = 9$ cm ir $r_1 = 3$ cm, o aukštinė $H = 8$ cm. Apskaičiuokite šio kūgio: a) tūrį; b) šoninio paviršiaus plotą.



Duota: $OM = 9$ cm, $O_1M_1 = 3$ cm, $O_1O = 8$ cm.
Rasti: V_{nup}, S_{nup}.
Sprendimas. a) Pratęsę nupjautinio kūgio aukštinę OO_1 ir sudaromąsias gausime kūgį, kurio aukštinė AO, o pagrindo spindulys OM. Sakykime, kad $AO_1 = x$. Tuomet $\frac{AO}{AO_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$, t. y. $\frac{x+8}{x} = \frac{9}{3} = 3$. Iš čia $x = 4$.
Taigi $k = 3$; $AO_1 = 4$ cm, $AO = 12$ cm.
Kadangi $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi$ (cm^3), $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3), tai $V_{\text{nup}} = 324\pi - 12\pi = 312\pi$ (cm^3).
b) Iš trikampio AMO apskaičiuojame AM:
$AM = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (cm).
$S = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$ (cm^2), $S_{\text{nup}} = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)S = \frac{3^2-1}{3^2} \cdot 135\pi = 120\pi$ (cm^2).

Atsakymas. a) $V_{\text{nup}} = 312\pi$ cm^3; b) $S_{\text{nup}} = 120\pi$ cm^2.

Pastaba. Nupjautinio kūgio tūrį galima apskaičiuoti remiantis formule:

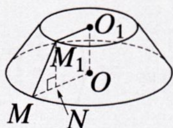
$$V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\pi H\left(r^2+r_1^2+rr_1\right)$$

čia r, r_1 — pagrindų spinduliai, o H — nupjautinio kūgio aukštinė.
Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$S_{\text{nup}} = \pi l(r+r_1)$$

čia r, r_1 — pagrindų spinduliai, o l — nupjautinio kūgio sudaromoji.

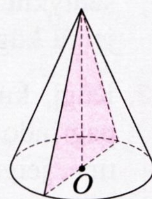
Pagal šias formules apskaičiuosime antrajame pavyzdyje nagrinėto nupjautinio kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.
a) $V_{\text{nup}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot (9^2 + 3^2 + 9 \cdot 3) = 312\pi$ (cm^3).



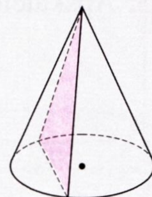
b) Iš taško M_1 nubrėžę į pagrindo plokštumą statmenį gauname statųjį trikampį M_1NM. Nupjautinio kūgio sudaromoji MM_1 yra trikampio M_1NM įžambinė.
Taigi $MM_1^2 = MN^2 + M_1N^2$,
$MM_1^2 = (9-3)^2 + 8^2 = 100$, $MM_1 = 10$ cm.
Vadinasi, $S_{\text{nup}} = \pi \cdot 10(9+3) = 120\pi$ (cm^2).

Žemiau pavaizduoti kūgio pjūviai įvairiomis plokštumomis, *nelygiagrečiomis* kūgio pagrindo plokštumai.

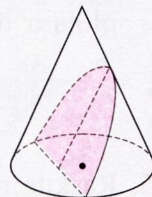
Kai plokštuma eina per kūgio aukštinę, pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas — skritulio skersmuo, o šoninės kraštinės — kūgio sudaromosios. Tas pjūvis vadinamas *ašiniu pjūviu*.



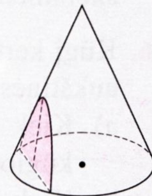
Kai plokštuma eina per kūgio viršūnę, bet ne per ašį ir kerta kūgį, pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės — kūgio sudaromosios.



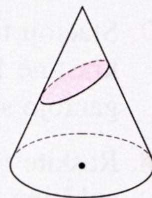
Kai plokštuma yra lygiagreti kūgio sudaromajai, kūgio paviršiaus ir šios plokštumos susikirtimo linija yra parabolė.



Kai plokštuma yra lygiagreti kūgio ašiai, tai tos plokštumos ir kūgio paviršiaus susikirtimo linija yra hiperbolė.



Kai plokštuma nėra lygiagreti nei sudaromajai, nei pagrindui, tai ji kerta kūgio paviršių kreive, vadinama elipse.

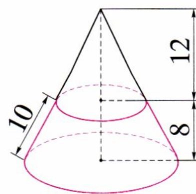


Pratimai ir uždaviniai

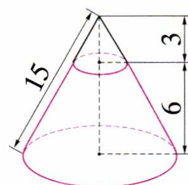
131. Plokštuma, lygiagreti kūgio pagrindo plokštumai, dalija kūgio aukštinę santykiu 2 : 3 imant nuo viršūnės. Apskaičiuokite kūgio pjūvio plotą, jeigu kūgio pagrindo spindulys lygus 10 cm.

132. Kūgį, kurio pagrindo spindulys yra 0,75 m, kerta plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai. Pjūvio spindulys lygus 0,5 m. Raskite kūgio aukštinę, jeigu atstumas tarp pagrindo ir pjūvio plokštumos lygus 0,4 m.

133. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio tūrį.



134. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą ir tūrį.



135. Raskite nupjautinio kūgio aukštinę, jei jo tūris lygus 20 dm^3, o pagrindų skersmenys yra 6 dm ir 2 dm.

136. Kūgį kerta plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai ir einanti per kūgio aukštinės vidurio tašką.

a) Kiek kartų nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas mažesnis už kūgio šoninio paviršiaus plotą?

b) Kiek kartų nupjautinio kūgio tūris mažesnis už kūgio tūrį?

137. Stačioji trapecija, kurios pagrindai yra 10 cm ir 45 cm, o ilgesnioji šoninė kraštinė lygi 37 cm, sukama apie trumpesniąją šoninę kraštinę. Raskite gautojo sukinio tūrį.

138. Raskite nupjautinio kūgio, kurio pagrindų spinduliai yra 6 dm ir 2 dm, o aukštinė lygi 5 dm:

a) šoninio paviršiaus plotą;

b) viso paviršiaus plotą;

c) tūrį.

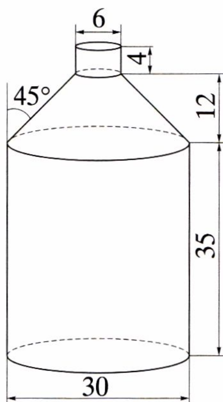
139. Kūgio aukštinė lygi pagrindo spinduliui R. Per kūgio viršūnę nubrėžta plokštuma, nuo pagrindo apskritimo atkertanti:

a) 90° lanką; b) 60° lanką.

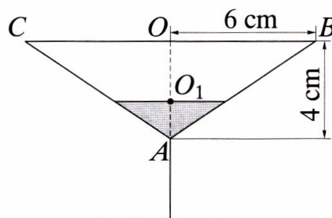
Raskite pjūvio plotą.

140. Kūgio aukštinė lygi 2 dm, o pagrindo spindulys — 17 cm. Kūgis kertamas plokštuma, kuri eina per kūgio viršūnę ir per kūgio pagrindo stygą, nuo pagrindo centro nutolusia 12 cm atstumu. Raskite to pjūvio plotą.

141. Bidono matmenys centimetrais parodyti brėžinyje. Kiek litrų vandens telpa šiame bidone?



142. Taurėje, kurios skerspjūvis pavaizduotas brėžinyje, barmenas gamina kokteilį. Į tuščią taurę jis įdeda 5 ledo rutuliukus, kurių kiekvieno skersmuo yra 2 cm. Ištirpus ledui gautas vanduo sudaro 0,9 buvusio taurėje ledo tūrio.



1) Kurią taurės tūrio dalį užims taurėje susidaręs vanduo?
2) Koks taurėje susidariusio vandens aukštis (AO_1)?
3) Kiek mililitrų gėrimo dar tilps taurėje?

143. Skardininkas gavo užsakymą pagaminti nupjautinio kūgio formos vonelę, kurioje tilptų 20 ℓ vandens, vonelės aukštis — 20 cm, o apatinio pagrindo skersmuo būtų lygus $\frac{2}{3}$ viršutinio pagrindo skersmens. Kiek kvadratinių centimetrų skardos reikės vonelei pagaminti?



144. Raskite mažiausią:

a) teigiamą sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę $\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} < 0$;

b) neigiamą sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybę $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} < 0$.

145. Išspręskite lygtį:

a) $|x^2 - 6x + 2{,}5| = 2{,}5$; b) $|x^2 + 2x + 3| = 3$.

146. a) Diskontuoto vekselio kaina 1489,75 Lt, o diskonto suma 10,25 Lt. Kiek dienų liko iki vekselio apmokėjimo termino, jeigu diskonto norma 8,2%?

b) Vekselio vertė 3200 Lt, o diskontuoto vekselio kaina 3128 Lt. Kokia yra diskonto procentų norma, jeigu iki vekselio apmokėjimo termino liko 90 dienų?

147*. Su kuria x reikšme trupmenų $\frac{3}{2x+1}$ ir $\frac{2}{2x-1}$ suma lygi jų sandaugai?

148*. Triženklį skaičių $\overline{3aa}$ dalijant iš vienaženklio skaičiaus gauta liekana yra 8. Raskite dalinį, daliklį ir dalmenį.

149. Nustatykite, kurios iš figūrų plotas yra tarp 20 cm^2 ir 25 cm^2:

A Trikampio, kurio kraštinės lygios 6 cm, 7 cm, 7 cm;

B Lygiašonės trapecijos, kurios įstrižainės statmenos, o aukštinė lygi $2\sqrt{6}$ cm;

C Skritulio išpjovos, kurios centrinis kampas lygus 200°, o skritulio spindulys — 4 cm;

D Rombo, kurio kraštinė lygi 5 cm, o vienas kampas lygus 120°;

E Stačiojo trikampio, kurio įžambinė lygi 13 cm, o statinių ilgių santykis 5 : 12.

150. Su kuriomis k reikšmėmis lygtis:

a) $(k-4)x^2+2(k-2)x+k=0$ turi du skirtingus realius sprendinius;

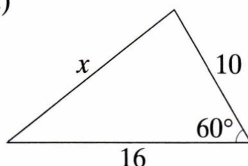
b) $kx^2+2(k+1)x+k+3=0$ realių sprendinių neturi?

151. Nespręsdami lygties raskite jos sprendinių kvadratų sumą:

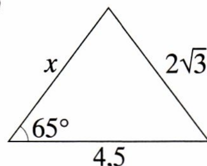
a) $6x^2-x-2=0$; b) $4x^2-8x-5=0$.

152. Pagal brėžinio duomenis raskite x:

a)



b)



153. Sandėlyje dėžėse yra po 24 kg, 23 kg, 17 kg ir 16 kg obuolių. Ar galima iš sandėlio paimti 100 kg obuolių, neatidarius dėžių?

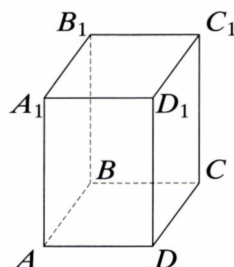
Pasitikrinkite

1. Erdvėje duoti 3 taškai M, N ir P, nesantys vienoje tiesėje. Ar tiesės MN, MP ir NP yra vienoje plokštumoje? Atsakymą pagrįskite.

2. Keturi taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Įsitikinkite, kad jokie 3 iš jų negali būti vienoje tiesėje.

3. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis. Išvardykite:

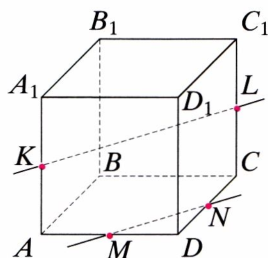
a) tieses, lygiagrečias tiesei BC;
b) plokštumas, kurios kerta plokštumą ABB_1;
c) lygiagrečias plokštumas;
d) plokštumas, kurioms lygiagreti tiesė AA_1;
e) poras plokštumų, neinančių per AA_1, kurių susikirtimo tiesė lygiagreti tiesei AA_1.



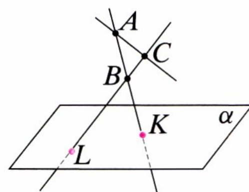
4. Tiesė a priklauso plokštumai α, o tiesė b yra lygiagreti tiesei a ir su plokštuma α turi bendrą tašką B. Įrodykite, kad tiesė b priklauso plokštumai α.

5. Duotos dvi lygiagrečios tiesės a ir b. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios tieses a ir b, yra vienoje plokštumoje. Nurodykite tą plokštumą.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Taškai K, L, M ir N yra briaunų AA_1, CC_1, AD ir DC vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesė KL yra lygiagreti tiesei MN. Kokia keturkampio $KLNM$ rūšis? Atsakymą pagrįskite.



7. Tiesės AB ir BC kerta plokštumą α taškuose K ir L. Raskite tiesės AC ir plokštumos α susikirtimo tašką.



8. Ar stačiosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ briaunų AB ir A_1B_1 vidurio taškus jungianti tiesė yra lygiagreti plokštumai BCC_1? Atsakymą pagrįskite.

9. Taškai E ir F yra tetraedro $ABCD$ sienų ADB ir BDC pusiaukraštinių susikirtimo taškai.

a) Nubraižykite piramidės pjūvį plokštuma, einančia per taškus D, E ir F.

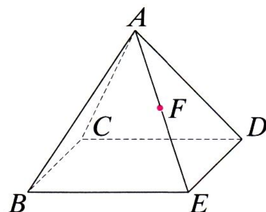
b) Įrodykite, kad tiesė EF yra lygiagreti tiesei AC. (*Nurodymas.* Įrodykite, kad $EF \parallel KL$, čia K ir L — briaunų AB ir BC vidurio taškai.)

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Nurodykite tieses, statmenas tiesei:
a) AB; b) B_1C_1; c) AA_1; d) AB_1.

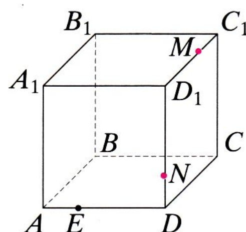
11. Per piramidės $ABCDE$ briaunos AE tašką F nubrėžkite tiesę lygiagrečią plokštumai:

a) ABC;

b) ACD.



12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas.



a) Raskite tiesės MN ir plokštumos ABC susikirtimo tašką.

b) Nubraižykite kubo pjūvį plokštuma, einančia per tiesę B_1C_1 ir tašką E. Apskaičiuokite pjūvio plotą, jei kubo briauna lygi a. Apskaičiuokite dvisienio kampo tarp pagrindo plokštumos ABC ir pjūvio plokštumos didumą.

c) Nubraižykite kubo pjūvį plokštuma, einančia per tiesę A_1B_1 ir tašką N. Raskite šios plokštumos ir plokštumos ABC sankirtos tiesę.

13. a) Stačiojo trikampio statiniai yra 12 dm ir 16 dm ilgio. Iš šio trikampio stačiojo kampo viršūnės iškeltas 28 dm ilgio statmuo trikampio plokštumai. Raskite atstumus nuo statmens galų iki stačiojo trikampio įžambinės.

b) Duotas trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 20 cm, 65 cm ir 75 cm. Iš šio trikampio didžiausio kampo viršūnės iškeltas trikampio plokštumai 12 cm ilgio statmuo. Raskite atstumus nuo statmens galų iki ilgiausios trikampio kraštinės.

14. a) Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės yra $5\sqrt{2}$ cm ir $\sqrt{2}$ cm ilgio, o šoninė briauna lygi 5 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

b) Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės yra 4 dm ir 1 dm ilgio, o šoninė briauna lygi 2 dm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

15. Piramidės aukštinė lygi 9 cm. Piramidė kertama plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai ir nuo piramidės viršūnės nutolusia 4 cm atstumu. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį, jeigu pjūvio plotas lygus 32 cm^2.

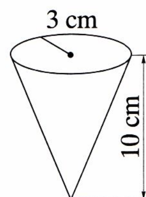
16. Piramidės pagrindo plotas lygus 507 cm^2, o aukštinė — 26 cm. Plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai, dalija aukštinę santykiu 6 : 7 pradedant nuo viršūnės. Apskaičiuokite:
a) pjūvio plotą; b) nupjautinės piramidės tūrį.

17. Kūgio aukštinė lygi 12 cm, o pagrindo spindulys — 10 cm. Per kūgio viršūnę nubrėžta plokštuma, atkertanti nuo pagrindo apskritimo 60° didumo lanką. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

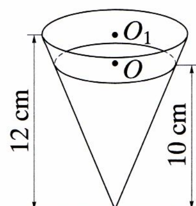
18. Kibiras yra nupjautinio kūgio formos. Pagrindų ilgiai yra 96 cm ir 66 cm, o aukštis — 27 cm. Kiek litrų vandens telpa į kibirą (0,1 ℓ tikslumu)?

19. Nupjautinio kūgio ašinis pjūvis — lygiašonė trapecija, kurios pagrindai yra 11 cm ir 21 cm ilgio, o šoninės kraštinės ilgis yra 13 cm. Raskite nupjautinio kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

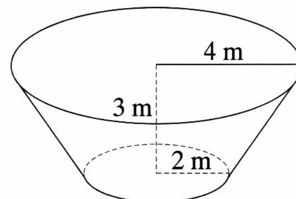
20. Ledai dedami į kūgio formos indelį, kurio matmenys parodyti brėžinyje (kūgio aukštis yra 10 cm, o spindulys — 3 cm).
1) Apskaičiuokite ledų tūrį.



2) Vasaros sezono metu ledų porcija padidinama. Ledai dedami į kūgio formos indelį, kurio aukštis yra 12 cm. Apskaičiuokite „didžiosios porcijos“ ledų tūrį. Keliais kubiniais centimetrais padidėja ledų porcija vasarą?



21. Vandens bokštas yra nupjautinio kūgio formos, kurio matmenys parodyti brėžinyje.
a) Apskaičiuokite bokšto tūrį.
b) Į bokštą prileista 85 t vandens. Per minutę iš bokšto išbėga 0,5 t vandens.



1) Apskaičiuokite, kiek vandens bokšte liks po 40 min; po 2 h; po t h.
2) Koordinačių plokštumoje (Ox ašyje 1 cm — 20 min, Oy ašyje 1 cm — 10 m^3) nubraižykite vandens kiekio bokšte grafiką.
3) Remdamiesi grafiku nustatykite, per kiek laiko išbėgs iš bokšto 55 t vandens.
4) Remdamiesi grafiku nustatykite, kiek vandens liks bokšte po 1,5 h.

22. Išspręskite nelygybę:

a) $\frac{1}{x-2} \geqslant -1$ b) $\frac{1}{x+3} \leqslant -2$

c) $\frac{x^2-6x+8}{(x-3)(x-5)} \geqslant 0$ b) $\frac{(x-2)(x-7)}{x^2-3x-10} \leqslant 0$

23. Apskaičiuokite rombo kampus (1° tikslumu), jei rombo įstrižainės yra: a) 8 cm ir 12 cm; b) 9 cm ir 16 cm.

24. Išspręskite lygtį:

a) $|x^2+6| = 6$ b) $|3x^2-1| = 1$

c) $|4x-x^2| = x^2-4x$ d) $|x^2-1| = x^2-1$

25. a) Vienas skaičius 4 vienetais mažesnis už kitą. Mažesniojo skaičiaus kvadrato ir kito skaičiaus skirtumas lygus 16. Raskite tuo skaičius.
b) Vienas skaičius 3 vienetais didesnis už kitą. Didesniojo skaičiaus kvadrato ir kito skaičiaus skirtumas lygus 23. Raskite tuo skaičius.

26. Verslininkui reikia pasiskolinti 25 000 Lt ketveriems metams. Vienas skolintojas siūlo paskolą su 10% metinių sudėtinių, o kitas — su 11% metinių paprastųjų palūkanų. Kuriuo pasiūlymu verslininkui naudingiau pasinaudoti?

27. Moneta metama tris kartus. Kokia tikimybė, kad skaičius atvirs ne mažiau kaip:
a) du kartus; b) vieną kartą.

28. Raskite atstumą tarp plokštumos taškų A ir B bei atkarpos AB vidurio taško C koordinates, jei:
a) $A(2; 5)$, $B(-2; 2)$; b) $A(-1; 3)$, $B(5; -5)$.

29. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{4y}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{2y}$ b) $\frac{x+1}{x} : \frac{2x+2}{x^2}$

c) $\left(\frac{a-2}{a+2} - \frac{a^2}{a^2-4}\right) \cdot \frac{a^2+2a}{1-a} + \frac{8}{2-a}$ d) $\frac{12-a}{2a+12} + \frac{a}{a+3} : \left(\frac{a+3}{a-3} + \frac{9}{9-a^2}\right)$

30. Apskaičiuokite:

a) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} - \sqrt{5}$; b) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{5}$.

9 TYRIMO UŽDAVINIAI



1 Kas yra kas?

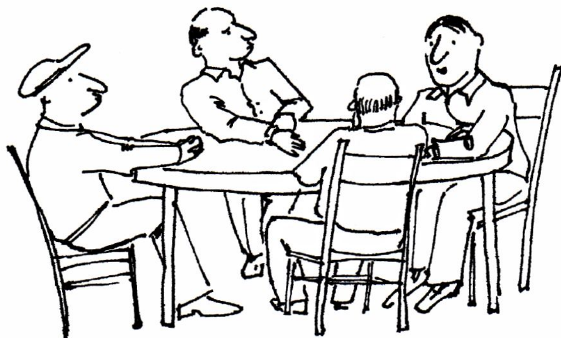
Kartais tenka spręsti neįprastus uždavinius, kurie iš pirmo žvilgsnio su matematika neturi nieko bendra. Tai logikos uždaviniai. Jų gausu spaudoje galvosūkių kertelėse, detektyvuose, nuotykių aprašymuose. Tokiems uždaviniams spręsti iš tikrųjų nereikia ypatingų matematikos žinių — užtenka sveiko proto ir nuovokos.

Keliais pavyzdžiais aptarkime tokių uždavinių sprendimo būdus.

1 PAVYZDYS. Prie stalo sėdi Brazys, Gečas, Klimas ir Rimkus. Jų vardai: Ąžuolas, Gytis, Saulius ir Rimas. Yra žinoma, kad:

1) Brazys — ne Ąžuolas ir ne Gytis;
2) Saulius sėdi tarp Gečo ir Rimo;
3) Klimas — ne Saulius ir ne Ąžuolas;
4) Rimkus sėdi tarp Klimo ir Gyčio.

Nustatykime, koks vardas atitinka kurią pavardę.



Sprendimas. Nusibraižome pavardžių ir vardų lentelę.

Vardas / Pavardė	Ąžuolas	Gytis	Saulius	Rimas
Brazys				
Gečas				
Klimas				
Rimkus				

Remdamiesi sąlyga pildome lentelę. Tuščiuose langeliuose rašome pliuso arba minuso ženklus. Jei pavardė neatitinka vardo, tai susikirtimo langelyje rašome minusą, jei atitinka — pliusą. Užpildytos lentelės kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje turės būti po *vieną pliusą* ir po *tris minusus*.

Pirmiausia lentelėje įrašome aštuonis minusus — po du iš kiekvieno teiginio. Kadangi „Brazys – ne Ąžuolas ir ne Gytis“, tai pirmos eilutės bei pirmojo ir antrojo stulpelių sankirtoje įrašome po minusą ir t. t.:

Vardas / Pavardė	Ąžuolas	Gytis	Saulius	Rimas
Brazys	–	–		
Gečas			–	–
Klimas	–	–	–	
Rimkus		–		

Matome, kad eilutėje „Klimas“ ir stulpelyje „Gytis“ liko po vieną tuščią langelį. Aišku, kad šiuose langeliuose turi būti po pliusą:

Vardas / Pavardė	Ąžuolas	Gytis	Saulius	Rimas
Brazys	–	–		
Gečas		+	–	–
Klimas	–	–	–	+
Rimkus		–		

Stulpelio ir eilutės, kuriuose yra pliusas, tuščiuose langeliuose parašome minusus, nes sprendimo pradžioje minėjome, kad pliusų daugiau būti negali:

Vardas / Pavardė	Ąžuolas	Gytis	Saulius	Rimas
Brazys	–	–		–
Gečas	–	+	–	–
Klimas	–	–	–	+
Rimkus		–		–

Aišku, kad eilutės „Brazys“ ir stulpelio „Ąžuolas“ tuščiuose langeliuose turi būti po pliusą (nes kituose yra minusai), ir baigiame pildyti lentelę, eilutės „Rimkus“ ir stulpelio „Saulius“ sankirtoje parašę minusą:

Vardas / Pavardė	Ąžuolas	Gytis	Saulius	Rimas
Brazys	–	–	+	–
Gečas	–	+	–	–
Klimas	–	–	–	+
Rimkus	+	–	–	–

Atsakymas. Brazio vardas Saulius, Gečo — Gytis, Klimo — Rimas, Rimkaus — Ąžuolas.

Šį uždavinį sprendėme sudarę salygą atitinkančią lentelę. Aišku, tai nėra vienintelis sprendimo būdas.

2 PAVYZDYS. Trys draugės — Asta, Rasa ir Eglė vilki balta, žalia ir ruda suknelėmis. Jų bateliai taip pat yra vienos iš tų trijų spalvų. Tik Astos suknelė ir bateliai yra vienos spalvos. Rasos nei suknelė, nei bateliai nėra balti. Eglė avi žalius batelius. Kokia kiekvienos mergaitės suknelės ir batelių spalva?

Sprendimas. Pagal sąlygą Rasos nei suknelė, nei bateliai nėra balti, o Eglė avi žalius batelius. Todėl Rasos bateliai rudi, o suknelė žalia, nes tik Astos suknelė ir bateliai vienos spalvos. Remdamiesi tuo, kad tik Astos suknelė ir bateliai vienos spalvos, darome išvadą — Astos bateliai ir suknelė yra baltos spalvos. Lieka — Eglės suknelė yra rudos spalvos.

Atsakymas. Astos suknelė ir bateliai yra balti; Rasos suknelė žalia, bateliai — rudi; Eglės suknelė ruda, o bateliai — žali.

Uždaviniai

154. Lina, Jurgita, Rita ir Monika susitiko dainų šventėje. Jos atvažiavo iš Rokiškio, Zarasų, Utenos ir Druskininkų. Nustatykite, kuriame mieste gyvena kiekviena mergaitė, jei:
1) Lina negyvena nei Utenoje, nei Zarasuose;
2) Monika yra iš Rokiškio;
3) Rita negyvena Zarasuose.

155. Trys mokinės — Rūta, Lina ir Vita atėjo į šventę apsirengusios skirtingomis suknelėmis: viena — languota, kita — vienspalve, trečia — žirneliais. Įspėk, kokia suknele vilki kiekviena mergaitė, jei Vitos suknelė buvo ne su žirneliais, Rūtos — nei su žirneliais, nei su langeliais.

156. Miško olimpiados bėgimo varžybose prizininkais tapo Stirna, Vilkas ir Kiškis. Kiškis nebuvo nei pirmas, nei trečias, Vilkas taip pat netapo čempionu. Kurią iš prizinių vietų užėmė kiekvienas iš žvėrių?

157. Trys broliai — Vytas, Rytis ir Gytis mokėsi skirtingose tos pačios mokyklos klasėse. Vytas buvo ne vyresnis už Gytį, o Rytis — ne vyresnis už Vytą. Pasakyk vyriausiojo, vidurinio ir jauniausiojo brolių vardus.

158. Vienoje klasėje mokėsi trys draugai: Algis, Vilius ir Rimas. Ūgiu jie truputį skyrėsi vienas nuo kito, todėl per kūno kultūros pamokas vienoje eilėje jie stovėdavo taip: vienas buvo pirmas, kitas — antras, o žemiausias — trečias. Algis nėra žemesnis už Vilių, o Rimas nėra aukštesnis už Vilių. Kuris iš jų buvo žemiausias, vidurinis ir aukščiausias?

159. Piešinyje ketvertas berniukų: Romas, Rimas, Rytis ir Gytis. Nustatyk kiekvieno jų vardą, jei Rimas ne pats didžiausias, bet didesnis už Romą ir Gytį, o Romas ne aukštesnis už Gytį.



160. Vienoje klasėje mokosi Jonas, Petras ir Juozas. Jų pavardės: Petraitis, Jonaitis ir Juozaitis. Žinoma, kad Jono pavardė — ne Jonaitis, Petro — ne Petraitis, Juozo — ne Juozaitis ir kad Juozas gyvena viename name su Petraičiu. Nustatyk kiekvieno berniuko pavardę.

161. Algis, Vytas ir Saulius gyvena toje pačioje gatvėje, bet kiekvienas kitame name. Toje pačioje gatvėje yra mokykla, kurioje jie mokosi. Vytui į mokyklą ne arčiau kaip Algiui, o Sauliui — ne toliau kaip Algiui. Berniukai mėgsta eiti į mokyklą kartu. Kuris iš jų turi išeiti iš namų anksčiausiai, kuris — šiek tiek vėliau ir pagaliau kuris — vėliausiai, kad kartu eitų į mokyklą?

162. Sėdėjo kartą ant upės kranto trys mokyklos draugai ir šnekučiavosi. Vieno berniuko pavardė buvo Staliūnas, kito — Bataitis, trečio — Stiklius. Jų tėvai dirbo: vienas — stikliumi, antras — staliumi, o trečias — batsiuviu.
— Įdomu, — tarė berniukas, kurio tėvas buvo batsiuvys, — kad nė vienas mūsų tėvų nedirba pagal tą specialybę, iš kurios kilusi jo pavardė.
— Tu teisus, — pagalvojęs pritarė Staliūnas.
Kuo dirba jų tėvai? Atsakymą pagrįskite.

163. Sauliaus, Vyto ir Lino pavardės Kalvaitis, Jonaitis, Petraitis. Linas, Vytas ir Jonaitis domisi matematika, o Vytas ir Petraitis — muzika. Kokia kiekvieno berniuko pavardė?

164. Trys draugai — Tadas, Gintas ir Rytis išėjo į mišką grybauti. Kiekvienas ėjo su seserimi. Mergaičių vardai buvo Rūta, Aušra ir Saulė.
Berniukai greit prisirinko krepšius grybų ir nutarė padėti mergaitėms.
Nė vienas berniukas nedėjo grybų į savo sesers krepšį. Gintas keletą grybų įdėjo į Rūtos krepšį, o Tadas — po keletą grybų į Rūtos ir Saulės krepšius. Pasakyk kiekvieno berniuko sesers vardą.

165. Trys bendraklasės — Rasa, Vaiva ir Danutė lavinasi įvairiose sporto sekcijose: viena — gimnastikos, kita — slidinėjimo, o trečia — plaukimo. Kokią sekciją lanko kiekviena mergaitė, jei Rasa plaukimu nesidomi, Vaiva nepastovi ant slidžių, o Danutė yra slidininkių varžybų nugalėtoja?

166. Šaškių turnyre kiekvienas berniukas — Žilvinas, Rytis ir Saulius gynė savo klasės garbę. Vienas jų mokėsi 10^a, kitas — 10^b, o trečias — 10^c klasėje. Pirmą partiją žaidė Žilvinas ir 10^a klasės mokinys. Antrą partiją žaidė Rytis su 10^c klasės mokiniu, o Žilvinas ilsėjosi.
Kurioje klasėje mokėsi kiekvienas berniukas?

167. Vienoje mokykloje matematiką, fiziką, chemiją, biologiją, istoriją ir geografiją dėsto mokytojai Augaitis, Bretkūnas ir Kazlauskas. Kiekvienas mokytojas moko dviejų dalykų. Chemijos mokytojas ir matematikos mokytojas gyvena viename name. Augaitis yra jauniausias. Matematikos mokytojas su Kazlausku labai dažnai žaidžia šachmatais. Fizikos mokytojas yra vyresnis už biologijos mokytoją, tačiau jaunesnis už Bretkūną. Vyriausias mokytojas gyvena toliausiai nuo mokyklos.
Kokius dalykus dėsto kiekvienas mokytojas?

168. Rungtyniavo šešios rajono rankinio komandos. Kiekviena iš jų susitiko su kita po vieną kartą. Penkis šeštadienius iš eilės vyko po trejas rungtynes. Pirmąjį šeštadienį „Ereliai“ nugalėjo „Žvirblius“, antrąjį šeštadienį „Ereliai“ įveikė „Muses“, trečiąjį šeštadienį „Musės“ nugalėjo „Varnus“. Ketvirtame rate „Vanagų“ ir „Žvirblių“ rungtynės baigėsi lygiosiomis. Su kuria komanda „Šarkos“ susitiko paskutiniame rate?

2 Kur tiesa?

Dažnai logikos uždavinių sprendimą palengvina sprendimo būdas, vadinamas „bandymų ir klaidų metodu“. Jo esmę ir algoritmą galima nusakyti taip:

- pagal uždavinio klausimą darome įvairias prielaidas;
- remdamiesi sąlygos teiginiais tikriname kiekvienos prielaidos teisingumą ir darome atitinkamas išvadas.

Sprendimą apipavidaliname sudarydami kelias lenteles (ar vieną bendrą lentelę) arba užrašydami samprotavimų grandinę sakiniais.

1 PAVYZDYS. Sesutės Akvilė, Kotryna ir Onutė sėdėjo kambaryje ir plepėjo. Viena iš jų paėmė brangiausius mamos kvepalus „Vanel“ ir pasikvėpino. Į atėjusios mamos klausimą, kuri iš jų ėmė kvepalus, Kotryna atsakė, kad nei ji, nei Onutė nesikvėpino. Onutė tvirtino, kad kvėpinosi Kotryna. Akvilė prisipažino, kad kvėpinosi ji. Kuri iš mergaičių kvėpinosi mamos kvepalais, jei viena sakė tiesą, o dvi mamai melavo?

Sprendimas.
Panagrinėkime visus tris galimus atvejus, kiekvieną kartą darydami prielaidą, jog kvėpinosi konkreti mergaitė. Kiekvienu atveju, atsižvelgdami į mergaičių tvirtinimus, užpildykime lentelę. Lentelėje tegul 1 reiškia tiesą, o 0 — melą.
1) Tarkime, kad kvėpinosi *Onutė*. Tada pagal sąlygą matome, kad visos mergaitės melavo:

Kotryna	Onutė	Akvilė
0	0	0

Taip būti negalėjo, nes sąlygoje pasakyta, kad viena sakė tiesą, o dvi melavo. Aišku, kad šią sąlygą tenkins lentelė, kurioje ties viena mergaite bus 1, o ties kitomis dviem mergaitėmis — 0. Vadinasi, mūsų prielaida, kad kvėpinosi Onutė, yra neteisinga. Taigi, Onutė nesikvėpino.
2) Tarkime, kad kvėpinosi *Akvilė*. Tada pagal sąlygą matome, kad Kotryna sakė tiesą, Onutė melavo, Akvilė sakė tiesą:

Kotryna	Onutė	Akvilė
1	0	1

Ši lentelė vėl neatitinka sąlygos, jog viena mergaitė sakė tiesą, o dvi mergaitės melavo. Mūsų prielaida, kad kvėpinosi Akvilė, yra neteisinga. Vadinasi, Akvilė nesikvėpino.

3) Tarkime, kad kvėpinosi *Kotryna*. Tada pagal sąlygą matome, kad Kotryna ir Akvilė melavo, o Onutė sakė tiesą:

Kotryna	Onutė	Akvilė
0	1	0

Ši lentelė atitinka sąlygą, nes viena mergaitė (Onutė) sakė tiesą, o dvi — (Kotryna ir Akvilė) melavo. Taigi prielaida, kad kvėpinosi Kotryna, yra teisinga.

Atsakymas. Kotryna.

2 PAVYZDYS. Paulius, Mikas ir Saulius, žaisdami kieme futbolą, išmušė langą. Į klausimą „Kas išmušė langą?“ kiekvienas iš vaikinukų atsakė dviem teiginiais:

Saulius: „Aš neišmušiau. Tai padarė Mikas“.

Mikas: „Aš neišmušiau. Langas jau buvo anksčiau išmuštas“.

Paulius: „Mikas neišmušė lango. Jį išmušė Saulius“.

Kas išmušė langą, jeigu vieno vaikino abu teiginiai teisingi, kito — abu melagingi, o trečio — vienas teiginys teisingas, o kitas — melagingas?

Sprendimas. Darome tris prielaidas:

1. Langą išmušė Paulius.
2. Langą išmušė Mikas.
3. Langą išmušė Saulius.

Tikriname kiekvieną prielaidą. Jeigu langą išmušė Paulius, tai Pauliaus atsakymo „Mikas neišmušė lango. Jį išmušė Saulius“ viena dalis teisinga, kita melaginga. Miko atsakymo „Aš neišmušiau. Langas jau buvo anksčiau išmuštas“ viena dalis teisinga, kita melaginga. Sauliaus atsakymo „Aš neišmušiau. Tai padarė Mikas“ irgi viena dalis teisinga, kita melaginga. Vadinasi, visi trys vaikinukai po kartą melavo, o tai netenkina uždavinio sąlygos „vienas vaikinukas abu kartus pasakė tiesą, ...“ Todėl prielaida „Langą išmušė Paulius“ neteisinga. Analogiškai tikriname kitas prielaidas.

Uždavinio visą sprendimą pateikiame viena lentele, kurioje 1 reiškia tiesą, o 0 — melą.

Prielaida: „Išmušė langą“	Atsakymai						Išvada
	Pauliaus		Miko		Sauliaus		
Paulius	1	0	1	0	1	0	Neteisinga
Mikas	0	0	0	0	1	1	Neteisinga
Saulius	1	1	1	0	0	0	Teisinga

Mus tenkina atvejis, kai kurioje nors eilutėje atsiranda rinkiniai: (1, 1), (1, 0), (0, 0) arba (1, 1), (0, 1), (0, 0). Prielaida, jog langą išmušė Saulius, atitinka

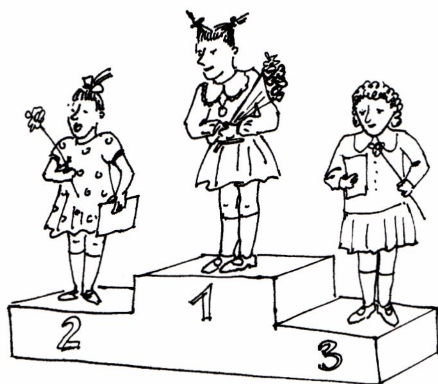
salygos teiginį „vienas vaikinukas (Paulius) abu kartus pasakė tiesą, antras (Saulius) — abu kartus pamelavo, o trečias (Mikas) — vieną kartą sakė tiesą, o kitą — melavo“, tai ji teisinga. Vadinasi, langą išmušė Saulius.

Atsakymas. Saulius.

3 PAVYZDYS. Viktorija, Pranutė, Jūratė ir Sigutė jaunųjų matematikų olimpiadoje užėmė keturias pirmąsias vietas. Į klausimą, kuri užėmė kokią vietą, buvo gauti vertinimo komisijos trijų narių atsakymai:

1. Pranutė II, Viktorija III;
2. Sigutė II, Pranutė I;
3. Jūratė II, Viktorija IV.

Pasirodė, kad kiekvieno atsakymo viena dalis teisinga, o kita klaidinga. Kuri mergaitė užėmė kokią vietą olimpiadoje?



Sprendimas. Jeigu pirmojo atsakymo teiginys „Pranutė užėmė II vietą“ yra teisingas, tai antrojo atsakymo nei vienas iš teiginių negali būti teisingas (II vieta jau užimta, o Pranutė užimti ir I, ir II vietą negalėjo). Vadinasi, pirmojo atsakymo teisingas yra antras teiginys „Viktorija užėmė III vietą“. (Be to, aišku, kad Pranutė ne antra.) Tada iš trečio atsakymo matome, kad teisingas teiginys yra „Jūratė užėmė II vietą“. Dabar iš antrojo atsakymo matome, kad teiginys „Sigutė užėmė II vietą“ — neteisingas. Vadinasi, teiginys „Pranutė I“ — teisingas. Sigutei lieka IV vieta.

Atsakymas. Pranutė užėmė I vietą, Jūratė — II, Viktorija — III, Sigutė — IV.

Uždaviniai

169. Vienas iš trijų draugų neišlaikė egzamino. Paklaustas Justas tvirtino, kad jis ir Rimas išlaikė. Rimas tvirtino, kad Justas ir Simas išlaikė, Simas tikino išlaikęs. Du vaikinai sakė tiesą, o vienas melavo.

a) Kuris iš vaikinų neišlaikė egzamino?

b) Kuris iš vaikinų melavo?

170. Kambaryje Gediminas, Paulius ir Virgis žaidė kamuoliu. Vieno vaikino mestas kamuolys sudaužė vazą. Į mamos klausimą, kuris sudaužė vazą, Gediminas atsakė, kad nelaimė nutiko jam, Paulius tvirtino, kad nei jis, nei Virgis vazos nesudaužė, o Virgis nurodė tai padarius Paulių. Kuris iš vaikinų sudaužė vazą, jeigu:

a) vienas sakė tiesą, o du melavo?

b) du sakė tiesą, o vienas melavo?

c) visi melavo?

171. Trys konkuruojančios firmos paskelbė sensacingus pranešimus:
„Šluota“: bankrutuoja „Ražas“;
„Ražas“: bankrutuoja „Šepetys“;
„Šepetys“: bankrutuoja „Šluota“.
Ar galima nustatyti, kuri firma bankrutuoja, jeigu iš trijų bankrutuoja tik viena ir žinoma, kad:

a) vienos firmos pranešimas teisingas, o kitų dviejų pranešimai klaidingi?

b) dviejų firmų pranešimai teisingi, o vienos — klaidingas?

c) visi pranešimai klaidingi?

172. Rasa sunkiai nešė kibirą vandens. Ją prisivijo trys bendraklasiai: Gailius, Žilvinas ir Saulius. Bet Rasa nesižvalgė, todėl draugų nematė. Nepriėjusi iki namų, ji pastatė kibirą su vandeniu ir nubėgo namo pasikviesti ko nors į pagalbą. Kol ji bėgo namo, vienas bendraklasis greitai pačiupo kibirą su vandeniu ir atnešė prie namo, kuriame Rasa gyveno. Kai ji išėjo, kibiras su vandeniu stovėjo šalia prieangio, o greta buvo trys draugai. Ji paklausė:
— Kuris atnešėte kibirą?
Į klausimą ji išgirdo tokius atsakymus:
Gailius. Aš atnešiau kibirą.
Žilvinas. Aš nenešiau kibiro.
Tada Rasa, žinodama, kad Saulius visada sako tik tiesą, paklausė:
— Sauliau, ar tiesą sako berniukai?
Saulius. Abu pasakė netiesą.
Rasa iš karto suprato, kas atnešė kibirą, ir padėkojo talkininkui. Tad kuris gi berniukas atnešė kibirą?

173. Trys sesutės — Rasa, Lina ir Eglė pasirodė mokyklos koncerte. Viena iš jų šoko, kitos dvi — dainavo. Kai tėvai paklausė, kuri mergaitė šoko, Rasa atsakė:

— Į klausimą atsakysime kiekviena, o jūs patys atspėkite, kuri iš mūsų šoko koncerte. Žinokite, kad Eglė visada sako tik tiesą.

Padėkite tėvams atspėti, kuri dukra šoko, jei atsakymai buvo tokie:

Rasa. Šokau aš.

Lina. Aš nešokau.

Eglė. Viena sesė sakė tiesą, o kita — netiesą.

Nurodymas. Pirma pabandykite atsakyti į klausimą, kuri mergaitė — Rasa ar Lina sakė tiesą. O tada galėsite atsakyti į pagrindinį klausimą: kuri iš trijų mergaičių šoko.

174. Trys mokinės — Jūratė, Laima ir Rūta moksleivių meninės gimnastikos varžybose užėmė tris pirmąsias vietas. Mokyklos draugai kitą dieną pasiteiravo:

— Girdėjome, kad jūs užėmėte pirmąsias tris vietas, bet nežinome, kuriai iš jūsų teko pirmoji vieta. Pasakykite.

Draugai išgirdo tris tokius atsakymus:

Jūratė. Aš užėmiau pirmąją vietą.

Laima. Aš neužėmiau pirmosios vietos.

Rūta. Aš užėmiau ne trečią vietą. Ir žinokite, kad vienos mano draugės atsakymas teisingas, o kitos — neteisingas.

Kurią vietą varžybose užėmė Rūta, jeigu jos atsakymas visiškai teisingas?

175. Dviračių lenktynėse dalyvavo penki mokiniai ir užėmė skirtingas vietas. Po varžybų keturi jų draugai pasakė:

Simas užėmė antrą vietą, Kazys — trečią;

Marius užėmė trečią vietą, Tomas — penktą;

Tomas užėmė pirmą vietą, Marius — antrą;

Simas užėmė antrą vietą, Vladas — ketvirtą.

Kiekvieno teiginio viena dalis teisinga, kita — klaidinga. Kurią vietą užėmė kiekvienas mokinys?

Pastaba. Uždavinys turi du atsakymus.

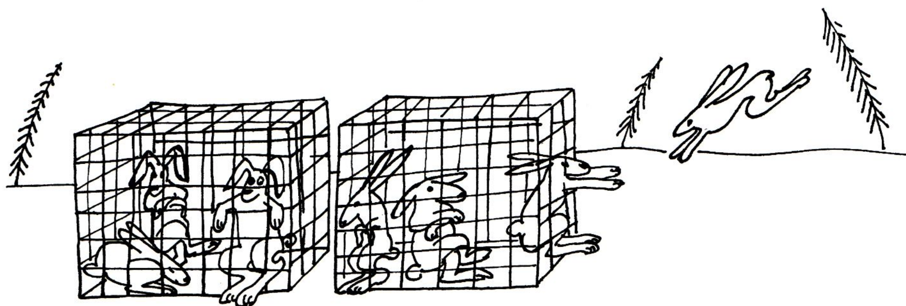
176. Trys draugai, linksmi vaikinai —
Jonas, Vytas ir Laurynas
Ginčijasi visada.
Jonas visada atspėja,
Vytas — niekad neatspėja,
O Laurynas — kai kada.
Prieš ekskursiją draugai
Viens kitam piktai kalbėjo.

Pirmas:
— Imkim guminius!
Lis rytoj smarkus lietus!
Antras:
— Ką jūs! Tai apgaulė!
Bus rytoj giedra ir saulė!
Trečias:
— Netikiu aš niekuo,
Mes rytoj sulauksim sniego!
— — — — — — — — — — — —
Tas, kuris kalbėjo trečias,
Gal už pirmą kiek teisesnis,
Bet vis viena neteisus.
Atsakyt prašau visus:
Ką pasakė Jonas gero,
Ką gi Vytas prasimanė,
Ką draugams Laurynas sakė?
Jau atsakėt?
— — — — — — — — — — — —
O dabar — paklausti noriu:
Pasakykit, koks ryt oras?

177. Saloje gyvena dvi gentys: teisuoliai, kurie visada sako tiesą, ir melagiai, kurie visada meluoja. Keliautojas sutiko čiabuvį ir paklausė, kas jis toks. Išgirdęs, kad šis iš teisuolių genties, pasisamdė jį. Jie paėjo ir pamatė kitą čiabuvį. Keliautojas pasiuntė savo pasisamdytą tarną paklausti, kokiai genčiai tas priklausąs. Tarnas grįžo ir pasakė, kad tas tvirtina, jog esąs iš teisuolių genties. Pasakykite, teisuolis ar melagis buvo tarnas.

3 Dirichlė principas

Dirichlė* principas juokais dažnai vadinamas *„narvelių ir triušių“* principu. Pavyzdžiui, negalima dviejuose narveliuose uždaryti septynių triušių taip, kad kiekviename narvelyje jų būtų ne daugiau kaip trys. Iš tikrųjų, jei kiekviename narvelyje būtų ne daugiau kaip trys triušiai, tai iš viso triušių būtų ne daugiau kaip $3 \times 2 = 6$, o tai prieštarauja sąlygai (yra septyni triušiai).



Dirichlė principą galėtume suformuluoti taip:

Jeigu į n narvelių reikia patalpinti daugiau negu n triušių, tai bent viename narvelyje teks patalpinti ne mažiau kaip du triušius.

Bendresnė Dirichlė principo formuluotė:

Jeigu į n dėžių (narvelių) reikia patalpinti daugiau negu $n \cdot k$ rutulių (triušių), tai bus bent viena dėžė (narvelis), į kurią pateks daugiau negu k rutulių (triušių).

Išspręskime keletą uždavinių remdamiesi Dirichlė principu.

1 PAVYZDYS. Spausdinant 25 puslapių tekstą padarytos 102 klaidos. Įrodykite, kad yra puslapis, kuriame padarytos daugiau negu keturios klaidos.

Įrodymas. Į 25 puslapius („narvelius“) sutalpintos 102 klaidos („triušiai“). Kadangi į 25 „narvelius“ sutalpinta daugiau negu $25 \cdot 4$ ($102 > 100$) „triušių“, tai pagal Dirichlė principą bus bent vienas „narvelis“, į kurį pateks daugiau negu 4 „triušiai“.
Taigi yra puslapis, kuriame padarytos daugiau negu keturios klaidos.

---

* Pėteris Gustavas Ležionas-Dirichlė (1805–1859) — žymus vokiečių matematikas.

Dažnai pats terminas „Dirichlė principas“ nė nevartojamas, o remiamasi prieštaros metodu (kaip skyrelio pradžioje).

2 PAVYZDYS. Klasėje yra 24 mokiniai. Visi klasės vaikai atsakinėjo į testo klausimus. Mikas Petraitis atlikdamas testą padarė 11 klaidų, o kiti vaikai klaidų padarė mažiau (galbūt ir visai nepadarė klaidų, t. y. padarė 0 klaidų). Įrodykite, kad bent trys mokiniai padarė klaidų vienodai.

Įrodymas. Čia „narveliai“ — klaidų skaičius, o „triušiai“ — mokiniai. Į narvelį su numeriu 0 „patalpinkime“ visus mokinius, kurie nepadarė nei vienos klaidos, į narvelį su numeriu 1 — tuos, kurie padarė vieną klaidą, į narvelį 2 — kurie padarė 2 klaidas ir taip iki narvelio su numeriu 10 (Mikui Petraičiui narvelio nereikia).
Kadangi (be Petraičio) yra $23 = 2 \cdot 11 + 1$ mokiniai, o narvelių — 11, tai pagal Dirichlė principą bus narvelis, kuriame yra daugiau kaip 2 mokiniai.

Dabar tą patį uždavinį išspręskime prieštaros būdu.
Tarkime priešingai: nėra trijų mokinių, kurie padarė vienodai klaidų. Tuomet kiekviename iš 11 narvelių su numeriais $0, 1, 2, \ldots, 10$ yra po du arba mažiau mokinių. Vadinasi, visuose narveliuose yra ne daugiau kaip $2 \times 11 = 22$ mokiniai. Pridėję Miką Petraitį, gautume 23 mokinius. Bet tai prieštarauja sąlygai, kad klasėje yra 24 mokiniai. Prieštara reiškia, kad teisingas uždavinio teiginys, t. y. kad bent trys mokiniai padarė vienodai klaidų.

Uždaviniai

178. Dėžėje yra 105 keturių rūšių obuoliai. Įrodykite, kad mažiausiai 27 iš jų yra vienos rūšies obuoliai.

179. Į parduotuvę atvežė 25 dėžes trijų rūšių obuolių, be to, žinoma, kad kiekvienoje dėžėje yra vienos rūšies obuoliai. Ar galima rasti 9 dėžes su tos pačios rūšies obuoliais?

180. Vienoje mokykloje yra 43 klasės, kuriose mokosi 1076 mokiniai. Įrodykite, kad yra klasė, kurioje mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.

181. Koks turėtų būti mažiausias mokinių skaičius mokykloje, kad bent du mokiniai tą patį mėnesį ir tą pačią dieną švęstų savo gimtadienį?

182. Klasėje yra 25 mokiniai. Ar yra toks metų mėnuo, kurį savo gimtadienį švęstų ne mažiau kaip 3 mokiniai?

183. Įrodykite, kad tarp trijų sveikųjų skaičių visuomet yra du skaičiai, kurių suma dali iš 2.

184. Įrodykite, kad tarp bet kurių šešių sveikųjų skaičių yra bent du skaičiai, kurių skirtumas dalus iš 5.

185. Įrodykite, kad tarp bet kokių 52 natūraliųjų skaičių galima rasti tokius du skaičius, kurių suma arba skirtumas dalytųsi iš 100.

186. Vienoje dėžėje yra 10 raudonų, 8 geltoni, 8 mėlyni ir 4 žali pieštukai. Tamsoje iš dėžės imami pieštukai. Kiek mažiausiai pieštukų reikėtų paimti, kad tarp ištrauktųjų būtų:

a) ne mažiau kaip 4 vienos spalvos pieštukai;

b) bent po vieną kiekvienos spalvos pieštuką;

c) ne mažiau kaip 6 geltoni pieštukai?

187. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 30 komandų, kurios tarpusavyje turi susitikti po vieną kartą. Įrodykite, kad bet kuriuo momentu yra bent dvi komandos, sužaidusios po tiek pat rungtynių.

188. Keletas apskritimo lankų nuspalvinti raudonai. Nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už apskritimo ilgio pusę. Įrodykite, kad yra toks apskritimo skersmuo, kurio galai nuspalvinti raudonai.

189. Duota n sveikųjų skaičių. Įrodykite, kad tarp duotųjų skaičių galima rasti keletą skaičių, kurių suma būtų dali iš n, arba vieną skaičių, dalų iš n.

190. Įrodykite teoremą: jeigu du sveikieji skaičiai m ir n tarpusavyje pirminiai (jų bendras didžiausias daliklis lygus 1), tai galima rasti natūralųjį skaičių k tokį, kad $m^k - 1$ dalytųsi iš n be liekanos.

191. Kvadrate, kurio kraštinės ilgis 1 m, pažymėtas 51 taškas. Įrodykite, kad visada galima nubrėžti tokį apskritimą, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$ m, o jo viduje būtų bent 3 pažymėtieji taškai.

192. Miškas užima kvadrato formos sklypą, kurio kraštas lygus 1 km. Jame auga 4500 medžių, kurių kiekvieno skersmuo 50 cm. Įrodykite, kad miške galima rasti stačiakampio formos $10\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{m}$ aikštelę, kurioje neauga nei vienas medis.

193. Raskite visus iškiluosius daugiakampius, turinčius savybę: statmens, nubrėžto iš daugiakampio bet kurio vidaus taško į bet kurią kraštinę, pagrindas yra šioje kraštinėje, bet ne jos tęsinyje.

194. Ar tiesa, kad iš 30 skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 50, visuomet galima išsirinkti du skaičius, iš kurių vienas yra du kartus didesnis už kitą?

195. Kvadrato kraštinės ilgis lygus 1. Jo viduje laisvai pasirenkamas 101 taškas, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Įrodykite, kad yra toks trikampis su viršūnėmis minėtuose taškuose, kurio plotas ne didesnis kaip $\frac{1}{100}$.

196. Iš sekos 1, 2, 3, ..., 200 išrinktas 101 skaičius. Įrodykite, kad visada galima nurodyti du skaičius, iš kurių vienas dalijasi iš kito.

197. Buvo 200 riešutų ir 21 berniukas. Įrodykite, kad nors ir po kiek riešutų jie suvalgytų (galbūt ir po 0), visada atsiras du berniukai, suvalgę po vienodai riešutų.

198. Name gyvena 123 gyventojai. Jiems kartu 3813 metų. Ar galima iš jų išrinkti 100 žmonių, kuriems iš viso ne mažiau kaip 3100 metų?

199. Įrodykite, kad iš 986 skirtingų natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 1969, visuomet galima paimti tris tokius skaičius, iš kurių dviejų suma būtų lygi trečiajam. Ar šis teiginys liks teisingas, jei skaičių 986 pakeisime skaičiumi 985?

200. Vadinamosios Fibonačio sekos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... kiekvienas narys, pradedant trečiuoju, lygus dviejų prieš jį esančių skaičių sumai. Ar atsiras tarp pirmųjų 100 000 001 šios sekos narių skaičius, kuris baigiasi keturiais nuliais?

201. Įrodykite, kad yra toks skaičiaus 1977 kartotinis, kuris dešimtainėje sistemoje užrašomas tik nuliais ir vienetais.

202. Įrodykite, kad yra toks skaičiaus 1993 kartotinis, kurio visi skaitmenys lygūs 1.

203. Įrodykite, kad iš bet kurių 65 natūraliųjų skaičių galima paimti 9 skaičius, kurių suma dalijasi iš 9 be liekanos.

204. Įrodykite, kad iš bet kurių 100 natūraliųjų skaičių visada galima paimti 15 tokių, kad bet kurių dviejų skaičių skirtumas dalytųsi iš 7 be liekanos.

205. Duota 12 skirtingų dviženklių natūraliųjų skaičių. Įrodykite, kad tarp jų galima rasti du skaičius, kurių skirtumas būtų dviženklis skaičius su vienodais skaitmenimis.

4 Kraštinio elemento metodas

Kraštinio elemento metodas — vienas iš uždavinių sprendimo metodų, patariantis ieškant atsakymo į uždavinio klausimą nagrinėti tam tikrą kraštinį objektą. Pavyzdžiui, kai uždavinyje kalbama apie atkarpos taškų aibę, metodas siūlo panagrinėti kraštinį (kairiausią arba dešiniausią) aibės tašką. Kai uždavinyje duota tam tikra skaičių aibė, kraštinio elemento metodas pataria panagrinėti didžiausią ar mažiausią iš šių skaičių. Žinoma, šis metodas (kaip ir bet kuris kitas) padeda ne visada.

1 PAVYZDYS. Kiekvienoje taisyklingojo 100-kampio viršūnėje parašyta po skaičių, ir visi 100 skaičių skirtingi. Ar gali kiekvienas iš jų būti lygus gretimose dviejose viršūnėse parašytų skaičių aritmetiniam vidurkiui?

Sprendimas. Įrodysime, kad taip būti negali. Iš tikrųjų, tarkime, kad kiekvienas skaičius lygus savo dviejų kaimynų vidurkiui. Nagrinėkime didžiausią iš skaičių ir pažymėkime jį M. Kadangi skaičiai skirtingi, tai skaičiaus M kaimynai mažesni už jį. Bet tada ir jų aritmetinis vidurkis mažesnis už M. Gavome prieštarą, todėl mūsų prielaida neteisinga. Vadinasi, negali būti taip, kad kiekvienas iš skaičių lygus savo kaimynų aritmetiniam vidurkiui.

Pastaba. Žinoma, galima nagrinėti ir mažiausią skaičių — sprendimas iš esmės lieka tas pats. Taigi patarimai „nagrinėk didžiausią!“ ir „nagrinėk mažiausią!“ čia vienodai geri.

2 PAVYZDYS. Petras turi 44 monetas. Šiandien jis apsirengęs taip, kad jo rūbuose yra 10 kišenių. Ar gali Petras susidėlioti monetas į kišenes taip, kad monetų skaičius kišenėse būtų skirtingas (tuščia kišenė taip pat gali likti)?

Sprendimas. Tarkime, kad Petrui pavyko susidėlioti monetas norimu būdu. Sunumeruokime Petro kišenes monetų skaičiaus didėjimo tvarka. „Neturtingiausioje“, t. y. pirmoje, kišenėje gali visai nebūti monetų, antroje bus ne mažiau kaip viena moneta, ..., „turtingiausioje“, t. y. dešimtoje, bus ne mažiau kaip 9 monetos. Tuomet 10-yje kišenių iš viso bus ne mažiau kaip $1+2+3+\cdots+9=\frac{(1+9)\cdot 9}{2}=45$ monetos.

Gavome prieštaravimą uždavinio sąlygai — juk Petras turėjo 44 monetas. Todėl prielaida, kad Petras gali susidėlioti monetas norimu būdu, t. y. taip, kad monetų skaičius kišenėse būtų skirtingas, yra klaidinga. Tai reiškia, kad Petras negali susidėlioti monetų į kišenes taip, kad monetų skaičius kišenėse būtų skirtingas.

Matome, kad spręsdami uždavinį „išrikiavome“ kišenes, ir patogu buvo pradėti nagrinėti nuo kraštinės — šiuo atveju pirmos kišenės.

Uždaviniai

206. Septyni grybautojai kartu surinko 100 grybų. Jokie du grybautojai nesurinko po vienodai grybų. Įrodykite, kad yra trys grybautojai, kurie kartu surinko ne mažiau kaip 50 grybų.

207. Duotos penkios skirtingos trupmenos, kurių skaitikliai lygūs 1, o vardikliai yra skirtingi nelyginiai skaičiai. Ar gali šių trupmenų suma būti lygi vienetui?

208. Yra 100 kubelių. Kiekviena kubelio siena nudažyta arba raudonai, arba mėlynai, arba žaliai. 80 kubelių turi raudoną sieną, 85 — mėlyną, 75 — žalią. Kiek kubelių turi visų spalvų sienas?

209. Į pirmąjį matematikų olimpiados ratą susirinko 200 moksleivių. Olimpiadoje buvo pateikti 4 uždaviniai. Į antrąjį olimpiados ratą patenka tie, kurie išsprendė visus uždavinius. I uždavinį išsprendė 180 moksleivių, II — 170, III — 160, IV — 150. Ar tilps antrojo matematikų olimpiados rato dalyviai patalpoje, kurioje gali dirbti ne daugiau kaip 50 moksleivių?

210. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4 sudarytas vienas keturženklis skaičius su skirtingais skaitmenimis, po to iš tų pačių skaitmenų — nelygus jam antras keturženklis skaičius. Įrodykite, kad nei vienas iš tų dviejų skaičių nesidalija iš kito.

211. Tiesėje duota aibė taškų, kurių kiekvienas yra atkarpos, jungiančios kuriuos nors du tos aibės taškus, vidurio taškas. Įrodykite, kad tokių taškų aibė yra begalinė.

212. Plokštumoje duota aibė taškų, kurių kiekvienas yra atkarpos, jungiančios kuriuos nors du tos aibės taškus, vidurio taškas. Įrodykite, kad tokių taškų aibė yra begalinė.

213. Kiekvienoje aštuoniakampio viršūnėje užrašyta po skaičių. Kiekvienas tas skaičius yra lygus gretimose viršūnėse parašytų skaičių aritmetiniam vidurkiui.

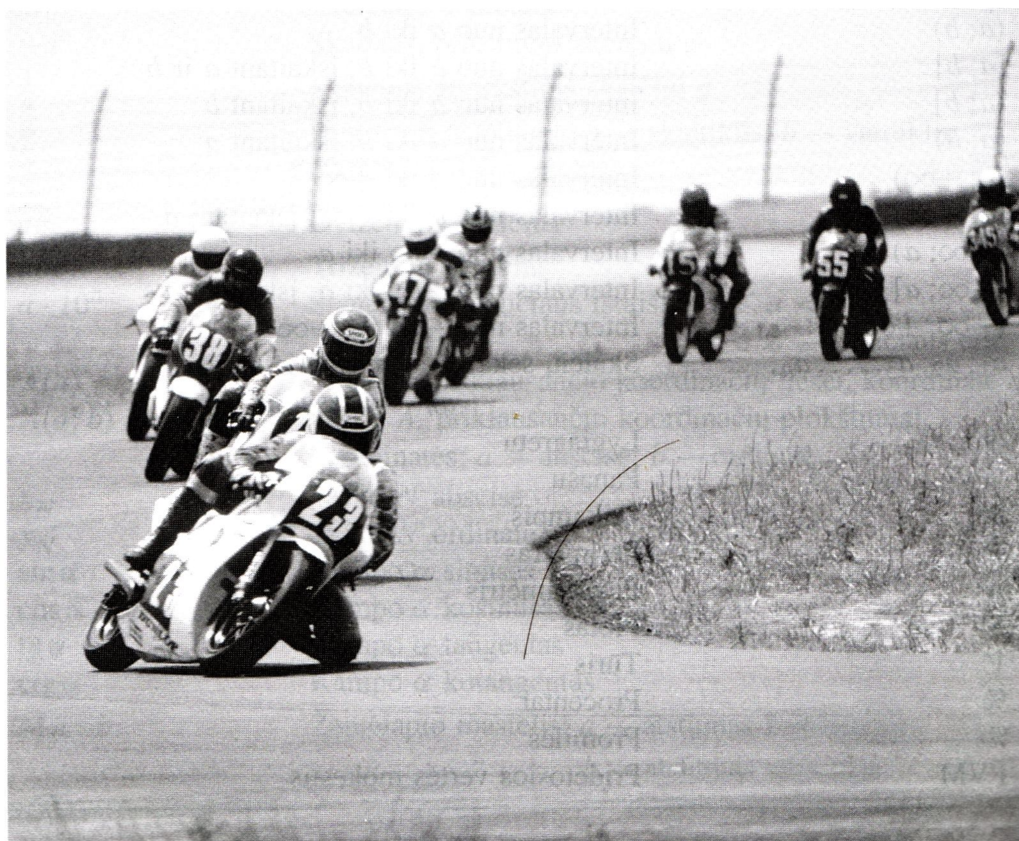
a) Ar gali visi aštuoni skaičiai būti skirtingi?

b) Ar gali bent du skaičiai būti nelygūs?

214. Ant kiekvienos iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinės kaip ant skersmens nubrėžtas skritulys. Įrodykite, kad skrituliai visiškai uždengia keturkampį.

215. Plokštumoje duota n taškų, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Įrodykite, kad galima nubrėžti apskritimą, kuris eitų per tris iš duotųjų taškų ir kurio viduje nebūtų nė vieno iš duotųjų taškų.

KARTOJIMO MEDŽIAGA
I DALIS



Pagrindiniai žymenys

Užrašas	Prasmė
$\boldsymbol{N}$	Natūraliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{Z}$	Sveikųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{Q}$	Racionaliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{I}$	Iracionaliųjų skaičių aibė
$\boldsymbol{R}$	Realiųjų skaičių aibė
$>$	Daugiau
$<$	Mažiau
$=$	Lygu
$\geqslant$	Daugiau arba lygu (nemažiau)
$\leqslant$	Mažiau arba lygu (nedaugiau)
$\approx$	Apytiksliai lygu
$\in$	Priklauso
$\cap$	Sankirta
$\subset$	Poaibis
$(a; b)$	Intervalas nuo a iki b
$[a; b]$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant a ir b
$(a; b]$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant b
$[a; b)$	Intervalas nuo a iki b, įskaitant a
$(a; +\infty)$	Intervalas nuo a iki $+\infty$
$[a; +\infty)$	Intervalas nuo a iki $+\infty$, įskaitant a
$(-\infty; a)$	Intervalas nuo $-\infty$ iki a
$(-\infty; a]$	Intervalas nuo $-\infty$ iki a, įskaitant a
$(-\infty; +\infty)$	Intervalas nuo $-\infty$ iki $+\infty$
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$	Skaičių seka; a_1 — pirmasis narys, a_n — n-tasis narys
$\parallel$	Lygiagretu
$\backsim$	Panašu
$\triangle$	Trikampis
P	Perimetras
p	Pusperimetris
S	Plotas
V	Tūris
%	Procentai
‰	Promilės
PVM	Pridėtosios vertės mokestis

Užrašas	Prasmė
$\mathbf{P}(A)$	Įvykio A tikimybė
$\overline{A}$	Įvykis, priešingas įvykiui A
$y = f(x)$	Kintamojo x funkcija; x — nepriklausomas kintamasis, y — priklausomas kintamasis
$D(f)$	Funkcijos f apibrėžimo sritis
$E(f)$	Funkcijos f reikšmių sritis
DBD	Didžiausiasis bendrasis daliklis
MBK	Mažiausiasis bendrasis kartotinis
$+$	Sudėtis
$-$	Atimtis
$\cdot$ arba $\times$	Daugyba
: arba /	Dalyba
$\sqrt{a}$	Kvadratinė (antrojo laipsnio) šaknis iš a; a — pošaknis
$\sqrt[3]{a}$	Kubinė (trečiojo laipsnio) šaknis iš a; a — pošaknis
$\sqrt[n]{a}$	n-tojo laipsnio šaknis iš a; a — pošaknis, n — šaknies laipsnis
$\|a\|$	Skaičiaus a modulis
$-a$	Skaičius, priešingas skaičiui a
$\frac{1}{a}$	Skaičius, atvirkštinis skaičiui a
$\frac{a}{b}$	Paprastoji trupmena; a — skaitiklis, b — vardiklis (skaičių a ir b santykis)
$\overline{ab}$	Dviženklis skaičius
$\overline{abc}$	Triženklis skaičius
$a \cdot 10^n$	Standartinė skaičiaus išraiška; $1 \leqslant a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$ — skaičiaus eilė
$A(a)$	Taško A, priklausančio koordinačių tiesei, koordinatė a
$A(a; b)$	Taško A, priklausančio koordinačių plokštumai, koordinatės; a — abscisė; b — ordinatė
x_N	Taško N abscisė
y_N	Taško N ordinatė
$\sin\alpha$	Kampo α sinusas
$\cos\alpha$	Kampo α kosinusas
$\operatorname{tg}\alpha$	Kampo α tangentas
$\operatorname{ctg}\alpha$	Kampo α kotangentas
M $a : b$	Žemėlapio mastelis; a — atstumas žemėlapyje, b — atstumas vietovėje

Užrašas	Prasmė
$ax + b = 0$	Tiesinė (pirmojo laipsnio) lygtis su vienu nežinomuoju; a, b — skaičiai, x — nežinomasis
$ax + by + c = 0$	Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais; a, b, c — skaičiai, x, y — nežinomieji
$ax^2 + bx + c = 0$	Kvadratinė (antrojo laipsnio) lygtis; a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis
$ax^2 + bx + c$	Kvadratinis trinaris; a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — kintamasis
D	Kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ (kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$) diskriminantas ($D = b^2 - 4ac$)
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$	Apskritimo lygtis; $(a; b)$ — apskritimo centro koordinatės, R — spindulio ilgis
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	Racionalioji lygtis (nežinomasis x yra ir vardiklyje)
$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$	Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — skaičiai, x, y — nežinomieji
$ax + b > 0$ $<$ $\geqslant$ $\leqslant$	Tiesinė nelygybė; a, b — skaičiai, x — kintamasis
$ax^2 + bx + c > 0$ $<$ $\geqslant$ $\leqslant$	Kvadratinė nelygybė; a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — kintamasis
$f(x) = ax + b$	Tiesinė funkcija; a, b — skaičiai, x — nepriklausomas kintamasis
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Kvadratinė funkcija; a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — nepriklausomas kintamasis

Laiko vienetai

1 amžius = 100 metų (1 a. = 100 m.)
1 metai = 12 mėnesių (1 m. = 12 mėn.)
= 365 dienos (366 dienos, kai metai yra keliamieji) (1 m. = 365 d. arba 366 d.)
1 mėnuo ≈ 4 savaitės (1 mėn. ≈ 4 sav.)
1 savaitė = 7 paros (1 sav. = 7 par.)
1 para = 24 valandos (1 par. = 24 val.)
1 valanda = 60 minučių (1 val. = 60 min.)
1 minutė = 60 sekundžių (1 min. = 60 sek.)

Ilgio vienetai

1 kilometras = 1000 metrų (1 km = 1000 m)
1 metras = 10 decimetrų (1 m = 10 dm)
1 decimetras = 10 centimetrų (1 dm = 10 cm)
1 centimetras = 10 milimetrų (1 cm = 10 mm)

Greičio vienetai

1 kilometras per valandą = 1000 metrų per valandą $\left(1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1000\,\frac{\text{m}}{\text{h}}\right)$
= $\frac{1000}{60}$ metrų per minutę $\left(1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)$
= $\frac{1000}{3600}$ metrų per sekundę $\left(1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{18}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$
= $\frac{1}{60}$ kilometro per minutę $\left(1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{60}\,\frac{\text{km}}{\text{min}}\right)$
= $\frac{1}{3600}$ kilometro per sekundę $\left(1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{3600}\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$

Ploto vienetai

1 kvadratinis kilometras = 1 000 000 kvadratinių metrų (1 km^2 = 1 000 000 m^2)
1 kvadratinis metras = 10 000 kvadratinių centimetrų (1 m^2 = 10 000 cm^2)
1 kvadratinis centimetras = 100 kvadratinių milimetrų (1 cm^2 = 100 mm^2)
1 hektaras = 10 000 kvadratinių metrų (1 ha = 10 000 m^2)
1 aras = 100 kvadratinių metrų (1 a = 100 m^2)

Tūrio vienetai

1 kubinis kilometras = 1 000 000 000 kubinių metrų (1 km^3 = 1 000 000 000 m^3)
1 kubinis metras = 1 000 000 kubinių centimetrų (1 m^3 = 1 000 000 cm^3)
1 kubinis centimetras = 1000 kubinių milimetrų (1 cm^3 = 1000 mm^3)
1 litras = 1 kubinis decimetras (1 ℓ = 1 dm^3)

Masės vienetai

1 tona = 1000 kilogramų (1 t = 1000 kg)
1 kilogramas = 1000 gramų (1 kg = 1000 g)
1 gramas = 1000 miligramų (1 g = 1000 mg)
1 centneris = 100 kilogramų (1 cnt = 100 kg)

Tankio vienetai

1 kilogramas į kubinį metrą = 0,001 gramo į kubinį centimetrą $\left(1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1}{1000}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$

Piniginiai vienetai

1 litas = 100 centų (1 Lt = 100 ct)

Kartotinių ir dalinių matavimo vienetų dalys

Pirmoji žodžio dalis	mega-	kilo-	hekto-	deka-	deci-	centi-	mili-	mikro-
Reikšmė	milijonas	tūkstantis	šimtas	dešimt	dešimtoji	šimtoji	tūkstantoji	milijonoji
Žymėjimas	M	k	h	da	d	c	m	μ
Daugiklis	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}

Pirminių skaičių lentelė (iki 1000)

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Natūraliųjų skaičių nuo 11 iki 99 kvadratų lentelė

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 10 kvadratų ir kubų lentelė

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Skaičių 2, 3 ir 5 laipsnių lentelė

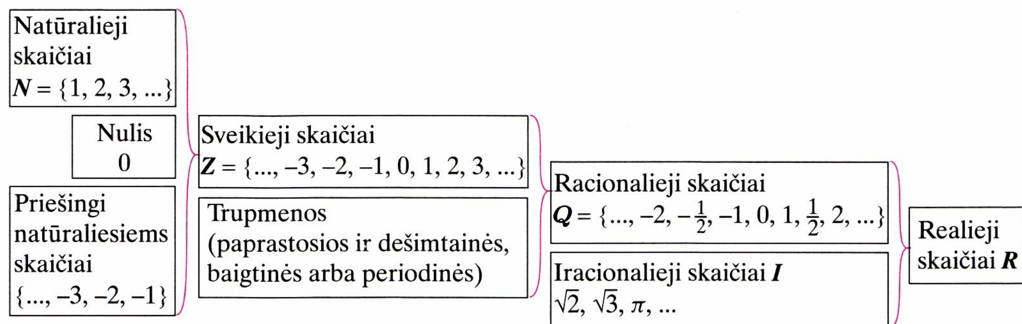
a	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
5	5	25	125	625	3125	15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė

Laipsniai	sin	tg	cos	Laipsniai	sin	tg	cos
0	0,000	0,000	1,000				
1	017	017	1,000	46	0,719	1,036	0,695
2	035	035	0,999	47	731	072	682
3	052	052	999	48	743	111	669
4	070	070	998	49	755	150	656
5	0,087	0,087	0,996	50	0,766	1,192	0,643
6	105	105	995	51	777	235	629
7	122	123	993	52	788	280	616
8	139	141	990	53	799	327	602
9	156	158	988	54	809	376	588
10	0,174	0,176	0,985	55	0,819	1,428	0,574
11	191	194	982	56	829	483	559
12	208	213	978	57	839	540	545
13	225	231	974	58	848	600	530
14	242	249	970	59	857	664	515
15	0,259	0,268	0,966	60	0,866	1,732	0,500
16	276	287	961	61	875	804	485
17	292	306	956	62	883	881	469
18	309	325	951	63	891	1,963	454
19	326	344	946	64	899	2,050	438
20	0,342	0,364	0,940	65	0,906	2,145	0,423
21	358	384	934	66	914	246	407
22	375	404	927	67	921	356	391
23	391	424	921	68	927	475	375
24	407	445	914	69	934	605	358
25	0,423	0,466	0,906	70	0,940	2,747	0,342
26	438	488	899	71	946	2,904	326
27	454	510	891	72	951	3,078	309
28	469	532	883	73	956	271	292
29	485	554	875	74	961	487	276
30	0,500	0,577	0,866	75	0,966	3,732	0,259
31	515	601	857	76	970	4,011	242
32	530	625	848	77	974	4,331	225
33	545	649	839	78	978	4,705	208
34	559	675	829	79	982	5,145	191
35	0,574	0,700	0,819	80	0,985	5,671	0,174
36	588	727	809	81	988	6,314	156
37	602	754	799	82	990	7,115	139
38	616	781	788	83	993	8,144	122
39	629	810	777	84	995	9,514	105
40	0,643	0,839	0,766	85	0,996	11,430	0,087
41	656	869	755	86	998	14,301	070
42	669	900	743	87	999	19,081	052
43	682	933	731	88	999	28,636	032
44	695	966	719	89	1,000	57,290	017
45	0,707	1,000	0,707	90	1,000	∞	0,000

1 Skaitiniai ir raidiniai reiškiniai

Skaičiai



Arabiškai	Romėniškai	Arabiškai	Romėniškai	Arabiškai	Romėniškai
1	I	10	X	100	C
2	II	20	XX	200	CC
3	III	30	XXX	300	CCC
4	IV	40	XL	400	CD
5	V	50	L	500	D
6	VI	60	LX	600	DC
7	VII	70	LXX	1000	M
8	VIII	80	LXXX	1500	MD
9	IX	90	XC	2000	MM

Lyginiai skaičiai: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... (dalijasi iš 2).

Nelyginiai skaičiai: 1, 3, 5, 7, 9, ... (nesidalija iš 2).

Pirminiai skaičiai: 2, 3, 5, 7, 11, ... (turi tik du daliklius: 1 ir patį skaičių).

Sudėtiniai skaičiai: 4, 6, 8, 9, 10, ... (turi daugiau negu du daliklius).

Teigiami skaičiai — skaičiai, didesni už 0.

Neigiami skaičiai — skaičiai, mažesni už 0.

Skaičius 0 nėra nei teigiamas, nei neigiamas.

Skaičius 1 nėra nei pirminis, nei sudėtinis.

Natūralusis skaičius dalijasi:

- iš 2, jei skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0, 2, 4, 6 arba 8;
- iš 3, jei skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3;
- iš 5, jei skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5;
- iš 9, jei skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9;
- iš 10, jei skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0.

Sudėtinius skaičius galima išskaidyti pirminiais dauginamaisiais, t. y. išreikšti pirminių skaičių sandauga.

Dviejų natūraliųjų skaičių *didžiausiasis bendrasis daliklis* (DBD) — tai didžiausias skaičius, iš kurio dalijasi abu tie skaičiai.

Dviejų natūraliųjų skaičių *mažiausiasis bendrasis kartotinis* (MBK) — tai mažiausias skaičius, kuris dalijasi iš abiejų tų skaičių.

Skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetinis vidurkis — tai jų suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, padalyta iš jų skaičiaus n, t. y.:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Bet kurį natūralųjį skaičių galima užrašyti skyrių suma, pavyzdžiui:

- dviženklis skaičius:
  $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$; a — dešimčių skaičius, b — vienetų skaičius.
- triženklis skaičius:
  $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$; a — šimtų skaičius, b — dešimčių skaičius, c — vienetų skaičius.

Teigiamą skaičių galima užrašyti *standartine išraiška*: $a \cdot 10^n$, kur $1 \leqslant a < 10$, o n — sveikasis skaičius. Skaičius n vadinamas skaičiaus eile.

Du skaičiai, kurių suma lygi 0, vadinami vienas kitam *priešingais* skaičiais: $a + (-a) = 0$. Vienas kitam priešingi skaičiai skiriasi ženklu.

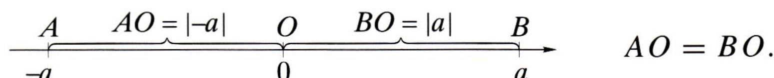
Du skaičiai, kurių sandauga lygi 1, vadinami vienas kitam *atvirkštiniais* skaičiais: $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ $(b \neq 0)$.

Skaičiaus a modulis apibrėžiamas taip:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kai } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kai } a < 0. \end{cases}$$

Skaičiaus a modulis $|a|$ parodo, kiek tas skaičius skaičių tiesėje nutolęs nuo nulio.

Vienas kitam priešingų skaičių moduliai yra lygūs, t. y. $|-a| = |a|$.

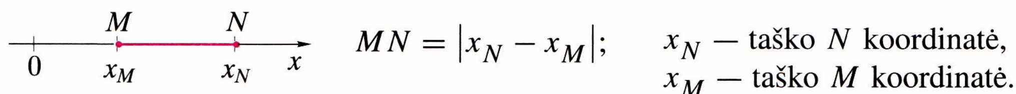


$AO = BO.$

Du teigiami dydžiai vadinami *tiesiogiai proporcingais*, jeigu jų atitinkamų reikšmių santykiai yra lygūs. Skaičius, kuriam lygūs tiesiogiai proporcingų dydžių atitinkamų reikšmių santykiai, vadinamas proporcingumo koeficientu. Du teigiami dydžiai yra tiesiogiai proporcingi, jeigu, vieno dydžio reikšmei kelis kartus padidėjus (sumažėjus), kito dydžio reikšmė tiek pat kartų padidėja (sumažėja).

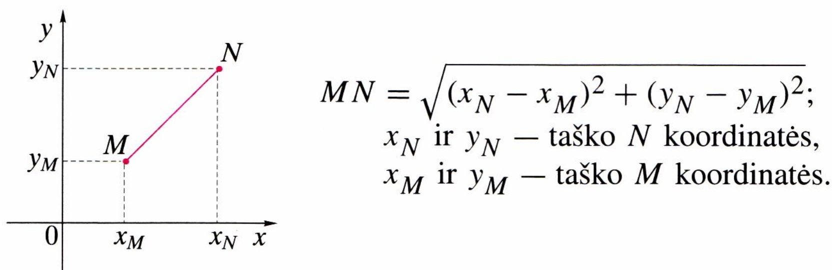
Du teigiami dydžiai vadinami *atvirkščiai proporcingais*, jeigu jų atitinkamų reikšmių sandaugos yra lygios. Skaičius, kuriam lygios atvirkščiai proporcingų dydžių atitinkamų reikšmių sandaugos, vadinamas atvirkštinio proporcingumo koeficientu. Du teigiami dydžiai yra atvirkščiai proporcingi, jeigu vieno dydžio reikšmei kelis kartus padidėjus (sumažėjus), kito dydžio reikšmė tiek pat kartų sumažėja (padidėja).

Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių ašiai, lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui.



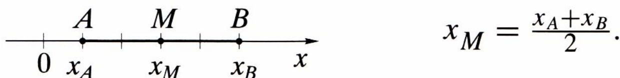
$MN = |x_N - x_M|$; x_N — taško N koordinatė, x_M — taško M koordinatė.

Atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių koordinačių plokštumai, lygus kvadratinei šakniai iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos.

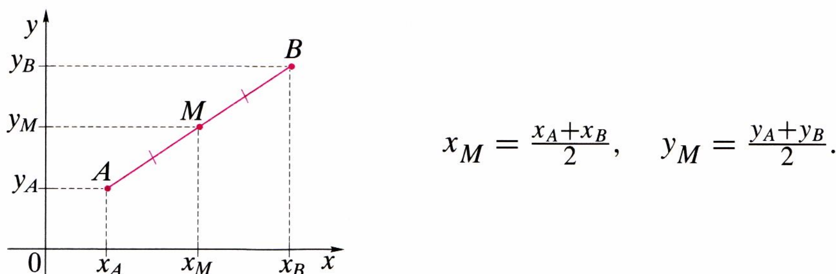


$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$;
x_N ir y_N — taško N koordinatės,
x_M ir y_M — taško M koordinatės.

Atkarpos vidurio taško koordinatės lygios atkarpos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei (aritmetiniam vidurkiui).



$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$.



$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$.

Veiksmai

Veiksmas	Užrašas	Savybės
Sudėtis	$a+b=c$ a, b — dėmenys c — suma	$a+b=b+a$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ $a+0=a$ $a+(-a)=0$
Atimtis	$a-b=c$ a — turinys b — atėminys c — skirtumas	$a-b=a+(-b)$ $a-0=a$ $0-a=-a$ $a-a=0$
Daugyba	$a\cdot b=c$ a, b — dauginamieji c — sandauga	$a\cdot b=b\cdot a$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$ $a\cdot 1=a$ $a\cdot 0=0$ $a\cdot\frac{1}{a}=1\ (a\neq 0)$ $(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$ $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$
Dalyba	$a:b=c\ (b\neq 0)$ a — dalinys b — daliklis c — dalmuo	$a:b=a\cdot\frac{1}{b}\ (b\neq 0)$ $a:a=1\ (a\neq 0)$ $0:a=0\ (a\neq 0)$ $a:1=a$ $(-a):b=a:(-b)=-(a:b)$ $(-a):(-b)=a:b$
Laipsnis	a^n a — laipsnio pagrindas n — laipsnio rodiklis	$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ kartų}},\ n\in\boldsymbol{N}$ $1^n=1,\ 0^n=0$, kai $n\in\boldsymbol{N}$ $a^1=a,\ a^0=1\ (a\neq 0)$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $a^m:a^n=a^{m-n}\ (a\neq 0)$ $(a^m)^n=a^{m\cdot n}\ (a\neq 0),\ m,n\in\boldsymbol{Z}$ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0)$
Kvadratinė šaknis	$\sqrt{a}$ a — pošaknis	$\sqrt{a}=b$, kai $b^2=a\ (b\geqslant 0,\ a\geqslant 0)$ $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$ $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$ $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$
Kubinė šaknis	$\sqrt[3]{a}$ a — pošaknis	$\sqrt[3]{a}=b$, kai $b^3=a$ $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$

Veiksmai su paprastosiomis trupmenomis

$a : b = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$,

$\frac{a}{b} = 0$, kai $a = 0$, $b \neq 0$,

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, $n \neq 0$,

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$,

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$,

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$,

jei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tai $ad = bc$.

Greitosios daugybos formulės

$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,

$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Skaidymas dauginamaisiais

$ab \pm ac = a(b \pm c)$ — bendrojo dauginamojo iškėlimas,

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — kvadratų skirtumas,

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; čia x_1 ir x_2 kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys (kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai).

Kvadratinį trinarį $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ galima išskaidyti dauginamaisiais, kai $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Skaičių palyginimas

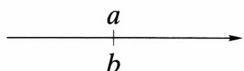
$a < b$, kai $a - b < 0$



$a > b$, kai $a - b > 0$



$a = b$, kai $a - b = 0$



Skaičių apvalinimas

Apvalindami skaičių iki *kurio nors skyriaus* visus po to skyriaus esančius skaitmenis keičiame nuliais (jeigu tie skaitmenys yra po kablelio, tai juos atmetame) ir:

- jeigu pirmas po to skyriaus esantis skaitmuo didesnis už 5 ar lygus 5 (5, 6, 7, 8, 9), tai paskutinį likusį skaitmenį padidiname vienetu, t. y. apvaliname su pertekliumi;
- jeigu pirmas po to skyriaus esantis skaitmuo mažesnis už 5 (0, 1, 2, 3, 4), tai paskutinio skaitmens nekeičiame, t. y. apvaliname su trūkumu.

Procentai

Skaičiaus a vienas procentas (%) yra $\frac{1}{100}$ to skaičiaus dalis:

$$a \cdot \frac{1}{100} = \frac{a}{100} = 0{,}01a.$$

Procentinis dviejų skaičių a ir b santykis parodo, kurią dalį (procentais) skaičius a sudaro skaičiaus b:

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Kai dydis a *padidėja* po p procentų t kartų (kiekvieną kartą procentus skaičiuojant nuo *pradinės* dydžio a reikšmės), tai po t kartų

$$a_t = a\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right) \text{ — paprastųjų procentų skaičiavimo formulė.}$$

Jei kiekvieną kartą procentai skaičiuojami nuo *priaugusios* dydžio a reikšmės, tai

$$a_t = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \text{ — sudėtinių procentų skaičiavimo formulė.}$$

Jei dydis a *sumažėja* po p procentų t kartų, tai paprastųjų procentų skaičiavimo atveju

$$a_t = a\left(1 - \frac{p}{100} \cdot t\right),$$

o sudėtinių procentų skaičiavimo atveju

$$a_t = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t.$$

Promilės

Skaičiaus a viena promilė (‰) yra $\frac{1}{1000}$ to skaičiaus dalis:

$$a \cdot \frac{1}{1000} = \frac{a}{1000} = 0{,}001a.$$

Sekos

Skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d, vadinama aritmetine progresija. Skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos skirtumu.
Bet kurį aritmetinės progresijos narį a_n galima išreikšti pirmuoju nariu a_1 ir progresijos skirtumu d:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(tai — aritmetinės progresijos n-tojo nario formulė).
Skaičių seka $b_1, b_2, b_3, \ldots$, kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį einančiam nariui, padaugintam iš pastovaus nelygaus nuliui skaičiaus q, vadinama geometrine progresija. Skaičius q vadinamas geometrinės progresijos vardikliu.

Paklaidos

Dydžio apytikslės reikšmės ir tikslios reikšmės skirtumo modulis vadinamas apytikslės reikšmės *absoliučiąja* paklaida, o absoliučiosios paklaidos ir apytikslės reikšmės santykis vadinamas apytikslės reikšmės *santykine* paklaida, t. y. jei skaičius a apytiksliai lygus x ($a \approx x$), tai apytikslės reikšmės x absoliučioji paklaida yra

$$|x - a|,$$

o santykinė —

$$\frac{|x-a|}{x}.$$

Santykinė paklaida dažniausiai reiškiama procentais:

$$\frac{|x-a|}{x} \cdot 100\%.$$

Trigonometrija

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$

Pratimai ir uždaviniai

1. Iš skaičių $\frac{1}{3}$; -4; 3; $-0{,}5$; $\frac{\pi}{2}$; $-\sqrt{2}$; 0; 4; $-\frac{2}{3}$ išrinkite:
a) natūraliuosius skaičius;
b) sveikuosius skaičius;
c) racionaliuosius skaičius;
d) neneigiamus skaičius;
e) neteigiamus skaičius;
f) vienas kitam priešingus skaičius;
g) vienas kitam atvirkštinius skaičius;
h) iracionaliuosius skaičius;
i) realiuosius skaičius.

2. Apskaičiuokite:

a) $2 - 0{,}03$ b) $-7 - 4$ c) $\frac{1}{3} + \frac{5}{12}$
d) $\frac{1}{7} - 0{,}7$ e) $\frac{2}{7} \cdot |0{,}7|$ f) $\left|-1\frac{1}{3}\right| : \frac{2}{9}$
g) $\left(\frac{1}{8} - 0{,}5\right) \cdot 4$ h) $-2 \cdot (-5{,}5) - |-5|$ i) $\left(2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{6} : \frac{7}{15}\right) \cdot 0{,}6$
j) $1\frac{5}{9} : \left(2\frac{1}{12} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{3}\right)$ k) $\frac{\frac{2}{5}-0{,}8}{\frac{4}{7}\cdot 0{,}49}$ l) $\frac{8{,}1\cdot\frac{2}{9}}{0{,}6-\frac{2}{3}}$
m) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{98}}$ n) $\frac{\sqrt{175}}{\sqrt{28}-\sqrt{63}}$ o) $\sqrt[3]{27} \cdot 6^0 - \sqrt{8 \cdot 2^{-1}}$
p) $\sqrt{27 \cdot 3^{-1}} + \sqrt[3]{8} : 4^0$ r) $9^{-2} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$ s) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-1} \cdot 25^{-2}$
t) $\frac{5^2}{|-5^2-(-5)^2|}$ u) $\frac{-(-6)^2+|-6|^2}{-6^2}$

3. Apskaičiuokite skaičių 2^{-2} ir $(-3)^{-1}$:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį;
e) skirtumo kvadratą; f) kvadratų skirtumą; g) sandaugos trečdalį.

4. Duoti reiškiniai $2x - 1$ ir $3 - x$. Raskite suprastintą jų:
a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dvigubą sandaugą;
e) kvadratų skirtumą; f) skirtumo kvadratą.

5. Apskaičiuokite reikšmę reiškinio:

a) $24 \cdot 72 + 24 \cdot 28$ b) $34 \cdot 57 - 24 \cdot 57$
c) $1{,}2 \cdot 15 + 15 \cdot 3{,}9 - 1{,}1 \cdot 15$ d) $148 \cdot 6 - 148 \cdot 3{,}6 - 2{,}4 \cdot 48$
e) $\frac{23^2+29^2}{2} - 23 \cdot 29$ f) $24 \cdot 16 + \frac{24^2+16^2}{2}$
g) $\sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$ h) $\operatorname{tg}^2 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$

6. Suprastinkite reiškinį:

a) $5x - x$;
b) $3x \cdot x$;
c) $x^2 - 3x^2 + x$;
d) $2 - 4x + 5x - 3$;
e) $(2x - 1) - (4 - x)$;
f) $3a^2b^5 + ab^4ab - ab^4a - 3a^2bb^3$;
g) $2abab - 4ba^2b + 7ab^2a + 3a^2b$;
h) $2x^{-1}y^3x^2yy^{-2}x$;
i) $a^4ba^{-1}b^2b^{-2}b^3a^{-3}$;
j) $(3a - 2b)^2 - 9a(a - 2b)$;
k) $4(4a^2 - 1) - (4a + 3)(4a - 3)$;
l) $(2x - y + x - y)(3x + 2y) + 3(y^2 - 3x^2)$;
m) $(2a + 3b)(a - 2b + a - b) - 2(b^2 + 2a^2)$;
n) $(1 + y)(1 - y) - (1 + y)^2$;
o) $(2t + 7)(t - 3) - 7(2t - 3)$;
p) $\frac{1}{2}\sqrt{60} + 2\sqrt{1500} - \sqrt{45} \cdot \sqrt{3}$;
r) $\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{72} - \sqrt{40} : \sqrt{5}$;
s) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 1)^2$;
t) $(\sqrt{b} + 1)(4 + \sqrt{b}) - (\sqrt{b} + 2)^2$;
u) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
v) $2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$;
z) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

7. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $x(x + 3) - (x - 2)(x + 1)$, kai $x = -\frac{1}{3}$;
b) $(3y - 2)(3y + 2) - 2(y^2 - 2)$, kai $y = -\frac{1}{7}$;
c) $(a + 1)(a - 5) - (4 - a)^2$, kai $a = \frac{1}{8}$;
d) $(3x + 2x^2)(x - 2) - 2x(x - 3)$, kai $x = \frac{1}{3}$.

8. Įrodykite tapatybę:

a) $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$;
b) $(m - n)(m + n) = m^2 - n^2$;
c) $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$;
d) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
e) $(a - 2b)(a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b^2) + 2(a^3 + 4b^3) = 3a^3$;
f) $(3m + n - 2m + n)(m - 2n) - 2(m - \sqrt{2}n)(m + \sqrt{2}n) = -m^2$;
g) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;
h) $\frac{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha} = 1$.

9. Palyginkite skaičius:

a) $\frac{12}{13}$ ir $\frac{13}{14}$; b) $-\frac{1}{3}$ ir $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{40}$ ir $\frac{1}{3}\sqrt{63}$; d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ ir $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

10. Skaičius $0{,}7$; $\frac{\pi}{4}$; $0{,}5\sqrt{2}$ ir $\frac{4}{5}$ surašykite mažėjimo tvarka.

A $0{,}7$; $0{,}5\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{4}{5}$ **B** $\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{4}$; $0{,}7$; $0{,}5\sqrt{2}$ **C** $\frac{4}{5}$; $0{,}5\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $0{,}7$
D $\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{4}$; $0{,}5\sqrt{2}$; $0{,}7$ **E** $\frac{4}{5}$; $0{,}5\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $0{,}7$

11. Parašykite:

a) mažiausią lyginį dviženklį skaičių;
b) didžiausią nelyginį dviženklį skaičių, kuris dalijasi iš 3;
c) mažiausią nelyginį triženklį skaičių, skaičiaus 9 kartotinį;
d) didžiausią lyginį triženklį skaičių, kuris dalijasi iš 5.

12. Raskite:

a) sumą dviejų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kurių didesnysis yra n;
b) sandaugą dviejų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kurių mažesnysis yra n;
c) sandaugą trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kurių vidurinysis yra n;
d) sumą trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kurių mažiausias yra $n-1$.

13. Įrodykite, kad skaičius:

a) $10^{25}-7$ dalijasi iš 3 be liekanos;
b) $10^{16}+8$ dalijasi iš 9 be liekanos.

14. Įrodykite, kad:

a) skirtumas $\overline{abc}-\overline{cba}$ yra skaičiaus 99 kartotinis;
b) suma $\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{zx}$ yra skaičiaus 11 kartotinis.

15. Skaičių parašykite standartine išraiška:

a) 700 000; b) 0,000145.

16. Skaičių 25 ir 0,0001 sandaugą parašykite standartine išraiška. Kokia yra sandaugos eilė?

A -4 **B** -3 **C** 3 **D** 4 **E** 7

17. Skaičių $1\frac{3}{7}$ išreikškite dešimtaine trupmena ir rezultatą suapvalinkite iki šimtųjų. Raskite gautos apytikslės reikšmės:

a) absoliučiąją paklaidą; b) santykinę paklaidą.

18. Išskaidykite dauginamaisiais:

a) $6 - 3x$ b) $x^2 - 2x$

c) $a - 3 + a^2 - 3a$ d) $x^3 + x^2 - x - 1$

e) $y^2 - 6y + 9$ f) $m^2 + 10mn + 25n^2$

g) $x^2 - 4y^2$ h) $x^4 - 16$

i) $8xy - 14x - 12y + 21$ j) $9xy^2 - 16xz^2$

k) $a^2 - 5a - 9ab + 45b$ l) $3a^2 - 6ab + 3b^2$

19. Kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškio:

a) $2\,\text{m} = \ldots\ \text{dm} = \ldots\ \text{mm}$; b) $300\,\text{a} = \ldots\ \text{ha} = \ldots\ \text{m}^2$;

c) $1{,}5\,\text{h} = \ldots\ \text{min} = \ldots\ \text{s}$; d) $5000\,\text{cm}^3 = \ldots\ \text{dm}^3 = \ldots\ \ell$;

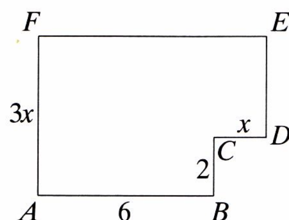
e) $18\,\text{km/h} = \ldots\ \text{cm/s}$; f) $18\,\text{m/s} = \ldots\ \text{km/h}$;

g) $250\,\text{kg/m}^3 = \ldots\ \text{g/cm}^3$; h) $0{,}06\,\text{g/cm}^3 = \ldots\ \text{kg/m}^3$?

20. Žinoma, kad automobilio stabdymo kelio ilgis s (metrais) apskaičiuojamas pagal formulę $s = 0{,}005v^2 + 0{,}2v$; čia v — automobilio greitis, išreikštas kilometrais per valandą. Apskaičiuokite automobilio stabdymo kelią, kai jis važiuoja:
a) 80 km/h greičiu; b) 90 km/h greičiu.

21. Julius 4 metais jaunesnis už Aldoną, o Darius 2 kartus vyresnis už Julių.
a) Kiek metų Aldonai, jeigu Dariui yra y metų?
b) Kiek metų Dariui ir kiek Aldonai, jeigu Juliui yra z metų?

22. Pagal brėžinio duomenis raskite:
a) figūros perimetrą;
b) figūros plotą;
c) atstumą tarp taškų A ir E;
d) atstumą tarp taškų A ir D.



23. Apskaičiuokite atstumą tarp koordinačių plokštumos taškų:
a) $C(0; -6)$ ir $D(3; -2)$; b) $M(3; -2)$ ir $N(-5; 4)$.
Raskite šiais taškais nusakytos atkarpos vidurio taško O koordinates.

24. Parašykite visus daliklius skaičiaus:
a) 30; b) 48.

25. Raskite skaičių 120 ir 144:
a) didžiausiąjį bendrąjį daliklį; b) mažiausiąjį bendrąjį kartotinį.

26. Iš 80 mandarinų, 120 kriaušių ir 200 saldainių reikia paruošti vaikams vienodas dovanėles, kad visi vaisiai būtų panaudoti.
a) Kiek daugiausiai dovanėlių galima paruošti?
b) Nustatykite vienos tokios dovanėlės sudėtį.

27. Trys draugai — Darius, Svajūnas ir Valdas lanko baseiną. Darius baseine būna kas antrą, Svajūnas — kas trečią, o Valdas — kas ketvirtą dieną. Kas kelintą dieną trys draugai būna baseine kartu?

A 6 **B** 8 **C** 12 **D** 18 **E** 24

28. 5 metrai audinio kainuoja 32 litus.
a) Kiek kainuoja 3,5 m šio audinio?
b) Kiek metrų šio audinio galima nusipirkti už 28,8 Lt?
c) Kiek kainuoja x metrų šio audinio?
d) Kiek metrų šio audinio galima nusipirkti už y litų?

29. Turimo lesalo užtektų 12 vištų 30 dienų.
a) Kiek dienų juo būtų galima lesinti 15 vištų, skiriant tą pačią normą per dieną; x vištų?
b) Kiek vištų juo būtų galima lesinti 18 dienų, skiriant tą pačią normą per dieną; y dienų?

30. Dydžiai a ir b yra tiesiogiai proporcingi. Užbaikite pildyti lentelę:

a	5		30	36	
b		2,4	6		$9\frac{1}{2}$

31. Dydžiai m ir n yra atvirkščiai proporcingi. Užbaikite pildyti lentelę:

m	5		30	36	
n		2,4	6		$9\frac{1}{2}$

32. Duotas reiškinys $M(x) = (x+3)^2 - 4(x+3)$.
a) Suprastinkite reiškinį $M(x)$.
b) Išskaidykite reiškinį $M(x)$ dauginamaisiais.
c) Išspręskite lygtį $(x+3)(x-1) = 0$.
d) Nubraižykite parabolę $y = M(x)$.
e) Kokia mažiausia reiškinio $M(x)$ reikšmė?
f) Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio $M(x)$ reikšmė yra lygi -3? 5?
g) Su kuriomis x reikšmėmis reiškinio $M(x)$ reikšmės yra teigiamos; neigiamos?

33. Suprastinę trupmenas $\frac{3a-6}{a^2-2a}$ ir $\frac{a^2-1}{2a+2}$ raskite jų:

a) sumą; b) skirtumą; c) sandaugą; d) dalmenį,
parašytus viena trupmena.

34. Reiškinį parašykite trupmena:

a) $x + \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$; b) $x - \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

35. Motorinės valties greitis upe pasroviui yra 20 km/h, o greitis prieš srovę yra 30% mažesnis už greitį pasroviui.

a) Koks upės tėkmės greitis?
b) Koks motorinės valties savasis greitis?

36. Valties greitis upe pasroviui yra a km/h, o prieš srovę — b km/h.

a) Koks būtų valties greitis ežere?
b) Koks upės tėkmės greitis?

37. Motorinės valties savasis greitis yra x km/h, o upės tėkmės greitis lygus 3 km/h.

a) Koks motorinės valties greitis pasroviui?
b) Koks motorinės valties greitis prieš srovę?
c) Kokį kelią nuplaukia motorinė valtis per 2 valandas pasroviui?
d) Kokį kelią nuplaukia motorinė valtis per 3 valandas prieš srovę?
e) Kiek kilometrų nuplaukia motorinė valtis, plaukdama 2,5 valandos prieš srovę ir 1,5 valandos pasroviui?
f) Kiek laiko plaukia motorinė valtis 50 km prieš srovę; 30 km pasroviui?
g) Kiek laiko plaukia motorinė valtis 20 km prieš srovę ir 10 km pasroviui?

38. Skautai pirmąją dieną nuėjo 14,4 km, o tai sudarė 36% per tris dienas nueito kelio.

a) Kokį kelią nuėjo skautai per tris dienas?
b) Kiek kilometrų nuėjo skautai antrą dieną, jeigu per ją nueitas kelias sudarė 25% viso nueito kelio?
c) Kiek kilometrų nuėjo skautai trečią dieną?
d) Kiek procentų antrą dieną nueito kelio sudarė trečią dieną nueitas kelias?

39. Iš dviejų vietovių, tarp kurių yra 10 km, tuo pačiu metu išvažiuoja du dviratininkai. Vieno jų greitis lygus 15 km/h, o kito — 0,6 pirmojo dviratininko greičio. Pagalvokite, kokiu atveju dviratininkai susitiks, o kokiu — vienas pavys kitą. Per kiek laiko tai įvyks ir kokį kelią kiekvienu atveju bus nuvažiavę dviratininkai?

40. Pusę kelio automobilis važiavo a km/h greičiu, o kitą pusę kelio — b km/h greičiu. Kokiu vidutiniu greičiu automobilis važiavo visą kelią?

41. Leidžiant vandenį vienu vamzdžiu baseinas pripildomas per 80 minučių, o kitu — per dukart trumpesnį laiką. Per kiek laiko pripildomas baseinas leidžiant vandenį dviem vamzdžiais sykiu?

42. Eglė ir Rasa drauge nuravi daržą per 2 h. Viena Eglė šį daržą nuravi per 3 h.

a) Per kiek laiko šį daržą nuravi viena Rasa?

b) Per kiek laiko būtų nuravėtas daržas, jeigu viena Eglė būtų ravėjusi tik 1 h, o po to darbą būtų užbaigusi viena Rasa?

c) Per kiek laiko būtų nuravėtas daržas, jeigu viena Rasa būtų ravėjusi tik 1 h, o po to darbą būtų užbaigusi viena Eglė?

43. Pirmas darbininkas atlieka tam tikrą darbą per $2x$ valandų, o antras tą patį darbą — per $3x$ valandų.

a) Kurią darbo dalį atlieka pirmas darbininkas per 1 h?

b) Kurią darbo dalį atlieka antras darbininkas per 1 h?

c) Kurią darbo dalį atlieka abu darbininkai per 1 h, dirbdami kartu?

d) Per kiek laiko atliks darbą abu darbininkai, dirbdami kartu?

e) Kurią darbo dalį, dirbant abiem kartu iki užbaigimo, atlieka pirmas darbininkas?

f) Kurią darbo dalį, dirbant abiem kartu iki užbaigimo, atlieka antras darbininkas?

44. Prekė kainavo 20 Lt. Dabar ji kainuoja 16 Lt.

a) Kiek procentų atpigo prekė?

b) Kiek procentų reikėtų pabranginti prekę, norint atstatyti ankstesnę jos kainą?

45. Darbuotojas sausio mėnesį uždirbo 800 Lt, o kiekvieną kitą mėnesį gaudavo po 2,5% sausio mėnesio uždarbio priedą.
Kiek uždirbo darbuotojas balandžio mėnesį? birželio mėnesį? per pusę metų?
Išspręskite tą patį uždavinį, jei kiekvieną mėnesį darbuotojo atlyginimas buvo didinamas 2,5%.

46. Druskos koncentracija 40 gramų tirpale yra 20%. Kokia būtų druskos tirpalo koncentracija promilėmis, jeigu į šį tirpalą:

a) įbertume 10 g druskos;

b) įpiltume 10 g vandens?

47. 5 gramų masės žiede yra 3,75 gramo aukso. Kokia aukso praba?

48. Krepšinio komandos startinio penketo žaidėjų amžiaus vidurkis yra 25 metai. Pakeitus vieną žaidėją 21-erių metų puolėju, žaidėjų aikštelėje amžiaus vidurkis sumažėjo vieneriais metais. Kokio amžiaus žaidėjas išėjo iš aikštelės?

A 23 **B** 24 **C** 25 **D** 26 **E** 27

49. Atšokęs nuo grindų sviedinukas kaskart netenka 30% buvusio aukščio. Sviedinukas krito iš h metrų aukščio. Į kokį aukštį pakils sviedinukas, atšokęs:

a) pirmąkart; b) antrąkart; c) trečiąkart; d) ketvirtąkart;
e) n-tąjį kartą?

50. Iš degtukų sudedamos figūros sudarytos iš vieno, dviejų, trijų arba daugiau vienodų penkiakampių. Lentelėje parodyta, kaip atrodo pirmosios keturios figūros, ir nurodyta, kiek degtukų reikia kiekvienai iš jų sudėti.

Penkiakampių skaičius	Figūra	Degtukų skaičius
1		7
2		12
3		17
4		22

a) Raskite, kiek reikės degtukų sudėti figūrai, sudarytai iš 8 penkiakampių.
b) Iš kelių penkiakampių sudarytą figūrą galima sudėti turint 47 degtukus?
c) Degtukų dėžutėje yra 60 degtukų. Iš daugiausiai kelių penkiakampių sudarytą figūrą galima sudėti pasinaudojus šiais degtukais?
d) Parašykite reiškinį, pagal kurį galima būtų apskaičiuoti, kiek prireiks degtukų, norint sudaryti figūrą iš n penkiakampių.
e) Pagal sudarytą formulę apskaičiuokite degtukų kiekį, kai penkiakampių yra 15; 25; 50.

2 Lygtys ir nelygybės

LYGTYS

Lygybė, kurioje yra nežinomasis, vadinama lygtimi.

Tiesinė lygtis	Kvadratinė lygtis	Racionalioji lygtis
$ax + b = 0$	$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$	$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Išspręsti lygtį — reiškia rasti visas nežinomojo reikšmes, su kuriomis lygtis virsta teisinga lygybe, arba įsitikinti, kad tokių reikšmių nėra.
Sprendžiant lygtis galima:

- prie abiejų lygties pusių pridėti arba iš abiejų lygties pusių atimti tą patį skaičių ar nagrinėjamoje srityje apibrėžtą reiškinį;
- abi lygties puses dauginti arba dalyti iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus.

Tiesinė lygtis
Lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu

$$ax + b = 0,$$

kur a, b — skaičiai, x — nežinomasis, vadinama *tiesine lygtimi su vienu nežinomuoju.*
Lygtis $ax + b = 0$, kai:

- $a \neq 0$, turi vienintelį sprendinį $x = -\frac{b}{a}$;
- $a = 0$, $b \neq 0$, sprendinių neturi;
- $a = 0$, $b = 0$, turi be galo daug sprendinių — visi skaičiai yra jos sprendiniai.

Tiesine lygtimi su dviem nežinomaisiais vadiname lygtį, kurią galima užrašyti pavidalu

$$ax + by + c = 0,$$

kur a, b ir c — skaičiai, x ir y — nežinomieji.
Lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, kuri paverčia tą lygtį teisinga skaitine lygybe.
Tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais turi be galo daug sprendinių; jos sprendiniai išsidėstę vienoje tiesėje.

Kvadratinė lygtis
Lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kur a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis, vadinama *kvadratine* lygtimi.
Lygties $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) sprendinių skaičių lemia diskriminanto $D = b^2 - 4ac$ reikšmė. Kai:

- $D > 0$, tai kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$;
- $D = 0$, tai kvadratinė lygtis turi vieną sprendinį (du sutampančius sprendinius) $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- $D < 0$, tai kvadratinė lygtis sprendinių neturi.

Jei bent vienas iš kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ koeficientų b ar c lygus nuliui, tai lygtis vadinama *nepilnąja* kvadratine lygtimi.

Pavidalas	Sprendinių skaičius	Sprendiniai
$ax^2 + c = 0$	Kai a ir c yra skirtingų ženklų — du	$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$
	Kai a ir c yra vienodų ženklų — nėra	—
$ax^2 + bx = 0$	Du	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	Vienas	$x = 0$

Racionalioji lygtis
Lygtis, kurią sudaro racionalieji reiškiniai, o vardiklyje būtinai yra nežinomasis, vadinama *racionaliąja* lygtimi.
Racionaliąją lygtį galima spręsti taip:

1) suteikti lygčiai pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
2) išspręsti lygtį $f(x) = 0$,
3) patikrinti, ar su gautomis nežinomojo reikšmėmis $g(x) \neq 0$. Jeigu $g(x) = 0$, tai tuos sprendinius atmesti.

Ją galima spręsti ir taip:

1) rasti lygtyje esančių trupmenų bendrąjį vardiklį,
2) abi lygties puses padauginti iš bendrojo vardiklio,
3) išspręsti gautąją lygtį,
4) atmesti tuos jos sprendinius, su kuriais bendrasis vardiklis lygus nuliui.

Išspręsti nelygybę — reiškia rasti visas kintamojo reikšmes, su kuriomis nelygybė yra teisinga (arba nustatyti, kad nelygybė tokių reikšmių neturi).
Sprendžiant nelygybes galima:

- prie abiejų nelygybės pusių pridėti arba iš abiejų nelygybės pusių atimti tą patį skaičių ar nagrinėjamoje srityje apibrėžtą reiškinį;
- abi nelygybės puses padauginti arba padalyti iš to paties *teigiamojo* skaičiaus nekeičiant nelygybės ženklo;
- abi nelygybės puses padauginti arba padalyti iš to paties *neigiamojo* skaičiaus pakeičiant nelygybės ženklą priešingu.

Tiesinės nelygybės
Nelygybė, kurią galima užrašyti pavidalu

$$ax + b > 0 \quad (ax + b \geqslant 0, ax + b < 0, ax + b \leqslant 0),$$

kur a, b — skaičiai, x — kintamasis, vadinama *tiesine* nelygybe.

Nelygybė	Koeficiento a ženklas	Sprendiniai	
$ax+b>0$		$x > -\frac{b}{a}$	$(-\frac{b}{a}; +\infty)$
$ax+b\geqslant 0$	$a>0$	$x \geqslant -\frac{b}{a}$	$[-\frac{b}{a}; +\infty)$
$ax+b<0$		$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax+b\leqslant 0$		$x \leqslant -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax+b>0$		$x < -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a})$
$ax+b\geqslant 0$	$a<0$	$x \leqslant -\frac{b}{a}$	$(-\infty; -\frac{b}{a}]$
$ax+b<0$		$x > -\frac{b}{a}$	$(-\frac{b}{a}; +\infty)$
$ax+b\leqslant 0$		$x \geqslant -\frac{b}{a}$	$[-\frac{b}{a}; +\infty)$

Kvadratinės nelygybės

Nelygybė, kurią galima užrašyti pavidalu

$$ax^2+bx+c > 0 \quad (ax^2+bx+c \geqslant 0, ax^2+bx+c < 0, ax^2+bx+c \leqslant 0),$$

kur a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — kintamasis, vadinama *kvadratine* nelygybe. Sprendžiant kvadratinę nelygybę pravartu rasti ją atitinkančius kvadratinės lygties sprendinius, juos atidėjus Ox ašyje, nubrėžti funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ grafiko (parabolės) eskizą. Tos kintamojo x reikšmės, su kuriomis grafikas yra virš x ašies, yra nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendiniai, o tos x reikšmės, su kuriomis grafikas yra žemiau x ašies, yra nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$ sprendiniai.

Kvadratinės nelygybės sprendiniai gali sudaryti vieną ar du skaičių intervalus. Yra nelygybių, kurių sprendiniai yra vienas skaičius, visi skaičiai, ir nelygybių, neturinčių sprendinių.

Koeficiento a ženklas	+	+	+	−	−	−
Diskriminanto $D = b^2 - 4ac$ ženklas	+	−	0	+	−	0
Parabolės $y = ax^2 + bx + c$ eskizas	x_1 x_2	x	x_1 $(=x_2)$	x_1 x_2	x	x_1 $(=x_2)$
Nelygybės $ax^2 + bx + c > 0$ sprendiniai	$(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; x_1)$, $(x_1; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	sprendinių nėra	sprendinių nėra
Nelygybės $ax^2 + bx + c < 0$ sprendiniai	$(x_1; x_2)$	sprendinių nėra	sprendinių nėra	$(-\infty; x_1)$ $(x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; x_1)$ $(x_1; +\infty)$
Nelygybės $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ sprendiniai	$(-\infty; x_1]$, $[x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	sprendinių nėra	$x_1\ (= x_2)$
Nelygybės $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ sprendiniai	$[x_1; x_2]$	sprendinių nėra	$x_1\ (= x_2)$	$(-\infty; x_1]$, $[x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

Pratimai ir uždaviniai

51. Ar skaičius 3 yra duotosios lygties sprendinys:

a) $2x = 6$ b) $2x + 6 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ e) $\frac{4x-12}{x^2-9} = 0$ f) $\frac{2x^2-18}{x+3} = 0$?

52. Išspręskite tiesinę lygtį:

a) $5x - 15 = 0$ b) $4 - 5x = 1$

c) $\frac{7}{5}x = 21$ d) $40 + 0{,}5x = 5$

e) $7(y - 10) = -21$ f) $\frac{1}{6}x - 3 = -x$

g) $1{,}2(x - 7) = 1{,}8x$ h) $\frac{2a-5}{3} = 0$

i) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{4} = 1$ j) $\frac{3}{5}(5 - x) - 6 = 0$

k) $9(x - 6) - 3(x + 3) = 7$ l) $z = 10 + z$

m) $\frac{x}{2} + 4 - 0{,}5(x + 8) = 0$ n) $5 - (8 - 3x) = 3x + 7$

o) $(2x - 3)^2 - 9 = 4x(x - 3)$ p) $(x - 2)(x + 2) = x^2 + x$

53. Išreiškę nežinomąjį y nežinomuoju x, raskite po du kiekvienos lygties sprendinius:

a) $3x + y = 4$; b) $5x - y = -6$; c) $8x + 2y = -7$; d) $12x - 3y = 8$.

54. Išspręskite lygtį:

a) $(4x - 3)(x + 6) = 0$ b) $(5x + 7)\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}\right) = 0$

c) $(2x - 5)(2x + 5) = 0$ d) $10x\left(\frac{1}{9} - 3x\right) = 0$

e) $x(x - 8) - 2(x - 8) = 0$ f) $(4x + 2) - x(2x + 1) = 0$

55. Raskite kvadratinės lygties sprendinius:

a) $x^2 - 8x = 0$ b) $7x^2 = 2x$ c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 + 16 = 0$ e) $4x^2 = 49$ f) $y^2 - 3 = 0$

g) $4x^2 = 0$ h) $\frac{x^2}{20} = \frac{x}{5}$ i) $6z^2 - 3 = 0$

j) $x^2 + 2x - 8 = 0$ k) $2x^2 - x - 3 = 0$ l) $4x^2 = 20x - 25$

m) $x^2 + 144 = -24x$ n) $7x^2 + 2x + 3 = 0$ o) $\frac{x^2}{2} = 4x - 1$

p) $0{,}5u^2 - u = -0{,}4$ r) $3(x^2 + 8) = 24 - 15x$ s) $(x + 3)(x - 3) = 39$

56. Išspręskite racionaliąją lygtį:

a) $\frac{2x-10}{x+2} = 0$ b) $\frac{3x^2-9x}{4x-5} = 0$ c) $\frac{x^2-81}{(x-6)(x+2)} = 0$

d) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ e) $\frac{x-2}{x-1} + 2 = 0$ f) $\frac{3x-4}{x-6} = \frac{1}{2}$

g) $\frac{5}{x+2} + 3 = \frac{6}{x+2}$ h) $\frac{5}{2x-1} - \frac{4}{x+2} = 0$ i) $t - \frac{2}{t-4} = 1$

j) $\frac{2x}{x+3} + \frac{3}{x} = 2$ k) $\frac{x^2-25}{x+1} = 0$ l) $\frac{z^2-16}{z^2-4z} = 0$

m) $\frac{6-x}{5x-30} = 0$ n) $\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+4} = 0$ o) $\frac{2x^2-9x-5}{6x^2+7x+2} = 0$

57. Su kuria x reikšme reiškinių $x + 1$ ir $2x - 3$:
a) suma lygi 20; -4;
b) skirtumas lygus 6; -12;
c) sandauga lygi 0; -3;
d) dalmuo (pirmąjį padalijus iš antrojo) lygus 0; $-\frac{1}{3}$?

58. 68 cm ilgio juostelė perkirpta į dvi dalis. Apskaičiuokite kiekvienos dalies ilgį, jei:
a) viena dalis 3 kartus ilgesnė už kitą;
b) viena dalis 7 cm trumpesnė už kitą.

59. Stačiakampės aikštės ilgis 30 m didesnis už plotį. Apskaičiuokite aikštės ilgį ir plotį, jei jos perimetras yra 280 m.

60. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė du kartus ilgesnė už pagrindą. Apskaičiuokite trikampio kraštines, jei trikampio perimetras lygus 60 cm.

61. Dviejų skaičių santykis yra 5 : 3. Raskite tuos skaičius, jei:
a) jų suma lygi 88; b) jų skirtumas lygus 4.

62. Raskite gretutinių kampų didumus, jei tų kampų didumų santykis yra:
a) 2 : 4; b) 3 : 7.

63. Už dvi knygas Kęstas sumokėjo 44 litus. Kiek kainavo kiekviena knyga, jei žinoma, kad:
a) viena knyga 20% brangesnė už kitą;
b) viena knyga 40% pigesnė už kitą.

64. Už dvi poras batų Marius sumokėjo 391 litą. Kiek kainavo kiekviena batų pora, jei žinoma, kad:
a) viena iš jų 30% brangesnė už kitą;
b) viena iš jų 30% pigesnė už kitą.

65. a) Trys berniukai per dieną pardavė 144 laikraščius. Antrasis pardavė 12 laikraščių daugiau negu pirmasis, o trečiasis — $\frac{5}{7}$ laikraščių, parduotų pirmojo ir antrojo berniukų kartu. Po kiek laikraščių pardavė kiekvienas berniukas?

b) Per tris dienas daržovių parduotuvė pardavė 980 kg daržovių: pirmą dieną 30 kg mažiau negu antrą dieną, o trečią dieną — $\frac{5}{9}$ daržovių, parduotų per pirmąsias dvi dienas. Kiek kilogramų daržovių buvo parduota kiekvieną dieną?

66. Turistai iš stoties į stovyklą ėjo 5 km/h greičiu. Jie grįžo tuo pačiu keliu eidami 4 km/h greičiu, todėl kelionėje sugaišo 1 h ilgiau.

a) Kiek laiko turistai ėjo iš stoties į stovyklą?

b) Kiek kilometrų nuo stoties iki stovyklos?

67. a) Per 8 h motorinė valtis pasroviui nuplaukia tiek pat, kiek per 10 h prieš srovę. Upės tėkmės greitis yra 2 km/h. Apskaičiuokite motorinės valties greitį stovinčiame vandenyje.

b) Valties greitis stovinčiame vandenyje yra 11 km/h. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį, jei plaukdami prieš srovę turistai sugaišo 6 h, o grįždami atgal — 5 h.

68. a) Raskite skaičių, kurio kvadratas 12 vienetų didesnis už patį skaičių.

b) Vienas skaičius 10 vienetų didesnis už kitą, o jų sandauga lygi 144. Raskite tuos skaičius.

c) Dviejų sveikųjų vienas po kito einančių skaičių kvadratų suma lygi 13. Raskite tuos skaičius.

69. Stačiakampio sklypo plotas lygus 192 m^2. Kokio ilgio tvoros reikia tokiam sklypui aptverti, jei:

a) sklypo plotis 4 m mažesnis už jo ilgį;

b) sklypo ilgis 3 kartus didesnis už jo plotį?

70. Atkirpus nuo kvadratinio lapo 3 cm pločio juostelę, likusios stačiakampės dalies plotas lygus 70 cm^2. Apskaičiuokite pradinius lapo matmenis.

71. Stačiojo trikampio vienas statinis 2 cm ilgesnis už kitą, o įžambinė lygi 10 cm. Apskaičiuokite trikampio statinių ilgius ir plotą.

72. Vienas stačiojo trikampio statinis 4 cm trumpesnis už kitą, o trikampio plotas lygus 30 cm^2. Apskaičiuokite trikampio statinių ilgius.

73. Visi klasės mokiniai, baigdami 10-ąją klasę, apsikeitė nuotraukomis. Kiek mokinių klasėje, jei iš viso buvo išdalyta:

a) 380 nuotraukų; b) 132 nuotraukos?

74. Iš vienos vietovės tuo pačiu metu išvažiavo du motociklininkai: vienas — į vakarus, kitas — į pietus. Po dviejų valandų atstumas tarp jų buvo 250 km. Apskaičiuokite abiejų motociklininkų greičius, jei vieno iš jų greitis sudaro 75% kito greičio.

75. Šventinio fejerverko raketa kyla 130 m/s greičiu ir sprogsta 840 m aukštyje. Po kiek sekundžių raketa pasieks nurodytą aukštį ir sprogs, jei aukštis apskaičiuojamas pagal formulę $h = vt - 5t^2$?

76. a) Dviratininkas išvažiavo iš kaimo į miestą, esantį už 30 km. Grįždamas atgal tuo pačiu keliu, jis sumažino greitį 2 km/h ir todėl važiavo 30 minučių ilgiau. Kiek laiko dviratininkas važiavo iš kaimo į miestą?

b) Traukiniui padidinus greitį 5 km/h, 120 km jis nuvažiavo 20 minučių greičiau nei įprasta. Koks buvo įprastinis traukinio greitis?

77. a) Tadas valtimi per 4 h nuplaukė 21 km pasroviui ir grįžo tokį pat kelią atgal. Koks upės tėkmės greitis, jei valties greitis stovinčiame vandenyje yra 14 km/h?

b) Kateris per 1,5 h nuplaukė 30 km pasroviui ir 13 km prieš srovę. Upės tėkmės greitis yra 2 km/h. Koks katerio greitis ežere?

78. a) Dalia nuravi braškyną per 6 h. Per kiek valandų nuravėtų šį braškyną Jovita, jei žinoma, kad jos abi kartu šį darbą atlieka per 4 h?

b) Du dažytojai, dirbdami kartu, gali nudažyti namą per 12 valandų. Per kiek valandų gali nudažyti namą kiekvienas iš jų, dirbdamas atskirai, jei vienas užtrunka 10 valandų ilgiau negu kitas?

c) Dvi kelininkų brigados, dirbdamos kartu, gali suremontuoti kelio ruožą per 10 valandų. Per kiek laiko gali atlikti šią užduotį kiekviena brigada, dirbdama atskirai, jei antroji, dirbdama atskirai, užtrunka dvigubai ilgiau negu pirmoji?

79. a) 60 t kroviniui pervežti buvo užsakyta tam tikras skaičius sunkvežimių. Dėl prasto kelio į kiekvieną sunkvežimį teko krauti 0,5 t mažiau negu buvo numatyta, todėl prireikė dar 4 sunkvežimių. Kiek sunkvežimių buvo užsakyta iš pradžių?

b) Ūkininkas paruošė šieno tiek, kad visiems arkliams kasdien jo tektų po 96 kg. Pardavus du arklius, kiekvieno arklio dienos davinys padidėjo 4 kg. Kiek arklių turėjo ūkininkas iš pradžių?

80. a) Netaisyklingosios trupmenos skaitiklis 4 vienetais didesnis už vardiklį. Jei tos trupmenos skaitiklį sumažintume 4 vienetais, o vardiklį padaugintume iš 2, tai gautume trupmeną, vienetu mažesnę už pirmąją. Raskite pradinę trupmeną.

b) Netaisyklingosios trupmenos skaitiklis 3 vienetais didesnis už vardiklį. Jei šios trupmenos skaitiklį sumažintume 3 vienetais, o vardiklį padaugintume iš 2, tai gautume trupmeną, vienetu mažesnę už pradinę. Raskite pradinę trupmeną.

81. Parašykite nelygybę, kurią gausite:

a) prie abiejų nelygybės $-6 < 8$ pusių pridėję skaičių $1\frac{1}{3}$; -4; $-2{,}7$;

b) iš abiejų nelygybės $3 > -5$ pusių atėmę skaičių -2; $6\frac{1}{7}$; $3{,}4$;

c) abi nelygybės $4{,}3 > -6$ puses padauginę iš skaičiaus 2; -3; $-\frac{1}{2}$;

d) abi nelygybės $-2{,}4 < 12$ puses padaliję iš skaičiaus 3; -2; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$.

82. Kurie iš skaičių -4; $2\frac{1}{6}$; $1{,}5$; 7; -100 yra sprendiniai nelygybės:

a) $6x - 2 \leqslant 11$; b) $3 + 4x > 9$?

83. Pavaizduokite skaičių tiesėje ir užrašykite intervalu skaičius, tenkinančius nelygybę:

a) $-5 < x < 7$ b) $-12 \leqslant x \leqslant 0$ c) $4 \leqslant x < 6$
d) $-3 < x \leqslant 9$ e) $x > 2$ f) $x < -4$
g) $x \leqslant -5$ h) $x < 0$ i) $x \geqslant 0$

84. Išspręskite nelygybę, jos sprendinių aibę pavaizduokite skaičių tiesėje, atsakymą užrašykite intervalu:

a) $8x \geqslant 56$ b) $12x < -48$
c) $-7x \leqslant 21$ d) $4x - 5 \geqslant 7 + 2x$
e) $11 - 3x > 12 - 6x$ f) $9 - 2x > 5x + 2$
g) $5(x-1) + 7 \leqslant 1 - 3(x+2)$ h) $4(2-3x) - (5-x) > 11 - x$
i) $(x+4)^2 - 2 > (x+5)^2 - 9$ j) $(x+1)^2 - (3-x)^2 \leqslant 14 + x$
k) $\frac{1}{3}(15x - 18) \geqslant \frac{1}{5}(5 - 10x)$ l) $0{,}4(2x-6) < 1{,}2(10-x)$
m) $\frac{3x+2}{6} > 1$ n) $2 > \frac{4x-5}{-3}$
o) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} > -6$ p) $0{,}2(5x-4) > x + 2$

85. Nurodykite didžiausią sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui:

a) $(-1; 3]$; b) $(7; 12)$; c) $(-12; -5]$; d) $(-\infty; -3)$.

86. Nurodykite mažiausią sveikąjį skaičių, priklausantį intervalui:

a) $(6; 20)$; b) $[-4; 7]$; c) $(-9; 2]$; d) $(5; +\infty)$.

87. Raskite didžiausią sveikąjį nelygybės sprendinį:

a) $0{,}2x \leqslant 16$; b) $-0{,}1x \geqslant 10$; c) $\frac{2}{7}x < 14$; d) $-\frac{1}{12}x \geqslant -4$.

88. Raskite mažiausią sveikąjį nelygybės sprendinį:
a) $1{,}4x \geqslant 42$; b) $1\frac{2}{3}x > -10$; c) $-\frac{4}{9}x < 8$; d) $-2{,}5x \leqslant -2$.

89. Išspręskite nelygybę:

a) $x^2 + 3x < 0$	b) $5x - x^2 \leqslant 0$	c) $-4x^2 > 20x$
d) $x^2 \leqslant 16$	e) $2x^2 > 8$	f) $-3x^2 \geqslant -27$
g) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$	h) $x^2 - 7x + 10 > 0$	i) $3x^2 - 2x - 1 > 0$
j) $x^2 - 8x + 16 \geqslant 0$	k) $x^2 - 2x + 1 < 0$	l) $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$
m) $2x^2 + x + 3 > 0$	n) $4x^2 - x + 5 \leqslant 0$	o) $7x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$
p) $x^2 + 16 > 0$	r) $x^2 + 25 < 0$	s) $6x^2 \geqslant 0$

90. Su kuriomis x reikšmėmis:
a) dvinaris $14 - x$ yra teigiamas;
b) dvinaris $7x + 102$ yra neigiamas;
c) dvinario $1{,}5x - 1$ reikšmės yra mažesnės už dvinario $2{,}3x + 2$ reikšmes;
d) dvinario $7 - 1{,}2x$ reikšmės yra didesnės už vienanario $4x$ reikšmes;
e) trupmenų $\frac{x}{2}$ ir $\frac{x}{3}$ skirtumas yra teigiamas;
f) trupmenų $\frac{2x-1}{4}$ ir $\frac{x+3}{6}$ suma yra neigiama;
g) dvinarių $x - 2$ ir $3x - 12$ sandauga yra neneigiama;
h) dvinarių $10 - x$ ir $2x - 5$ sandauga yra neteigiama?

91. Raskite skaičių, jei žinoma, kad:
a) trys penktadaliai šio skaičiaus yra mažiau už -15;
b) 8% to skaičiaus yra daugiau už 24.

92. Stačiakampio vienos kraštinės ilgis yra 8 cm. Koks turi būti kitos kraštinės ilgis, kad stačiakampio perimetras būtų mažesnis už perimetrą kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 6 cm?

93. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinės ilgis yra 18 cm, o plotis — 10 cm. Koks turi būti šio gretasienio aukštis, kad jo tūris būtų mažesnis už tūrį kubo, kurio briauna lygi 9 cm?

94. Turistai sumanė iš stovyklos motorine valtimi plaukti upe prieš srovę, o paskui pasroviui grįžti atgal. Upės tėkmės greitis yra 2 km/h, o valties savasis greitis yra 20 km/h. Kaip toli gali nuplaukti turistai, kad kelionėje užtruktų ne ilgiau kaip 8 valandas?

95. Matematikos mokytoja testus nutarė vertinti 100 balų sistema. Algis už pirmuosius keturis testus gavo 85, 89, 90 ir 81 balą. Kokį mažiausią penktojo testo įvertinimą turėtų gauti Algis, jeigu jis nori, kad penkių testų vidurkis būtų:
a) ne mažesnis už 85; b) ne mažesnis už 87?

3 Lygčių ir nelygybių sistemos

Lygčių sistemos sprendinys yra tos nežinomųjų reikšmės, su kuriomis kiekviena sistemos lygtis virsta teisinga lygybe.
Lygčių sistemas sprendžiame *grafiniu* būdu, *keitimo* būdu ir *sudėties* būdu.

Spręsdami lygčių sistemą grafiniu būdu, braižome lygčių, įeinančių į tą sistemą, grafikus. Grafikų susikirtimo taškų koordinatės ir yra tos lygčių sistemos sprendiniai.

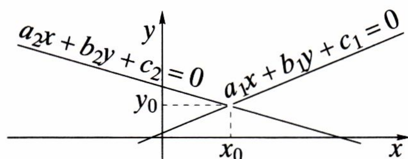
Spręsdami lygčių sistemą keitimo būdu, kurios nors lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu nežinomuoju ir gautą išraišką įstatome į kitą sistemos lygtį.

Spręsdami lygčių sistemą sudėties būdu, sistemos lygtis dauginame iš tokių skaičių, kad sudėjus jas panariui būtų pašalintas vienas iš nežinomųjų.

Tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0; \end{cases}$ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — skaičiai, x ir y — nežinomieji.

Tiesių $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ susikirtimo taško koordinatės $(x_0; y_0)$ yra sistemos sprendinys.



Kai viena sistemos lygtis yra tiesinė, o kita — netiesinė, dažniausiai tinka keitimo būdas:

- tiesinės lygties vieną nežinomąjį išreiškiame kitu;
- kitoje lygtyje tą nežinomąjį keičiame gautąja jo išraiška;
- išsprendžiame gautą lygtį su vienu nežinomuoju;
- apskaičiuojame atitinkamas kito nežinomojo reikšmes.

Tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sistemos

$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \ (\geqslant, <, \leqslant), \\ a_2x + b_2 > 0 \ (\geqslant, <, \leqslant); \end{cases}$ a_1, b_1, a_2, b_2 — skaičiai, x — kintamasis.

Išspręsti nelygybių sistemą — reiškia rasti visų sistemos nelygybių bendruosius sprendinius arba nustatyti, kad jų nėra.

Pratimai ir uždaviniai

96. Ar skaičių pora (2; 5) yra lygčių sistemos sprendinys:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 3, \\ 6x + y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 2y = 1, \\ 10x - 3y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x = 3, \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + xy = 14, \\ x + y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y = 5x, \\ y^2 - x^2 = 21? \end{cases}$

97. Išspręskite lygčių sistemą grafiškai:

a) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 13, \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 - 4 = y, \\ y = -x - 2 \end{cases}$

98. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y = 3x - 7, \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 16, \\ 5x + y = 25 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = 17, \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 3y = 23, \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x + 9y = -13, \\ 4x - 3y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 160, \\ y = 3x \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - 4y = 9, \\ xy + 7y^2 = 2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = 0{,}8, \\ xy = 2{,}4 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x^2 + 2y = 18, \\ 3x = 2y \end{cases}$ l) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 24, \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ n) $\begin{cases} x - y = 7, \\ \frac{6}{x+1} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$ o) $\begin{cases} 2x + y = -9, \\ \frac{1}{x} - \frac{4}{y} = 1 \end{cases}$

99. Raskite koordinates taškų, kuriuose kertasi:
a) tiesės $y = 2x + 4$ ir $x - y = 1$;
b) apskritimas $x^2 + y^2 = 17$ ir tiesė $y = 3x + 1$;
c) parabolė $y = 2x^2 - 6x + 1$ ir tiesė $y = 2x - 5$.

100. Raskite du skaičius, jei jų:
a) suma lygi 35, o skirtumas lygus 7;
b) suma lygi 34, o sandauga lygi 288;
c) skirtumas lygus -16, o sandauga lygi 192;
d) suma lygi 10, o kvadratų suma lygi 698;
e) kvadratų skirtumas lygus 100, o iš trigubo pirmojo skaičiaus atėmę dvigubą antrąjį skaičių gautume 30.

101. a) Valtis plaukė upe pasroviui 15 km/h greičiu, o prieš srovę — 9 km/h greičiu. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį ir valties savąjį greitį.

b) Keliautojai kateriu 120 km pasroviui nuplaukė per 2 valandas. Grįžtant prieš srovę tam pačiam atstumui įveikti prireikė 2 valandų 40 minučių. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį ir katerio savąjį greitį.

c) Skrisdamas pavėjui lėktuvas 360 km nuskrido per 40 minučių, o skrendant prieš vėją tokiam pačiam atstumui įveikti prireikė 5 minutėmis daugiau. Koks vėjo greitis ir koks lėktuvo savasis greitis?

102. a) Dovanoms įpakuoti Lina nusipirko 3 maišelius ir 2 dėžutes, o Rima 4 tokius pat maišelius ir vieną dėžutę. Lina sumokėjo 4,5 Lt, o Rima 4 Lt. Kiek kainavo vienas maišelis ir kiek viena dėžutė?

b) Jurga už 4 riešutinius ir 2 grietininius šokoladus sumokėjo 13 litų 40 centų. Inga toje pačioje parduotuvėje už tokius pačius 3 riešutinius ir 4 grietininius šokoladus sumokėjo 15 litų 30 centų. Kiek kainuoja vienas riešutinis ir kiek vienas grietininis šokoladas?

103. a) Bandymui chemijos laboratorijai prireikė 500 gramų 30% rūgšties tirpalo. Laboratorijoje yra tik 25% ir 50% rūgšties tirpalų. Kiek gramų kiekvienos rūšies tirpalo reikės paimti norint pagaminti reikiamą tirpalą?

b) Juvelyras norėjo įsigyti 800 gramų 45% vario lydinio. Kadangi įmonėje buvo tik 30% ir 70% vario lydinių, jam teko palaukti, kol reikiamas lydinys buvo pagamintas. Kokį kiekį 30% ir 70% vario lydinio sunaudojo gamintojai, ruošdami juvelyrui 800 gramų 45% vario lydinį?

104. a) Metų pradžioje Jurgis investavo 10 000 litų: dalį pinigų — vienoje kompanijoje už 10% metinių palūkanų, likusius — kitoje už 12% metinių palūkanų. Metų pabaigoje Jurgis iš viso gavo 1020 litų palūkanų. Kiek pinigų buvo investuota už 10% ir kiek už 12% metinių palūkanų?

b) Dainius 12 000 litų padėjo į du bankus. Vienas bankas moka 3%, kitas — 5% metinių palūkanų. Metų pabaigoje Dainius iš viso gavo 550 litų palūkanų. Kiek pinigų padėta į vieną ir kiek į kitą banką?

105. Reikia aptverti stačiakampį sklypą, kurio vienas kraštas 10 m ilgesnis už kitą. Sklypo plotas lygus 1200 m^2. Raskite tvoros ilgį.

106. Stačiakampio plotas lygus 420 m^2, o jo perimetras yra 94 m. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

107. Stačiojo trikampio plotas lygus 84 cm^2, o jo statinių ilgių skirtumas yra 17 cm. Apskaičiuokite kiekvieno statinio ilgį.

108. Stačiakampio perimetras lygus 68 m, o jo įstrižainės ilgis yra 26 m. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius ir stačiakampio plotą.

109. a) Dvi gamtininkų grupės, dirbdamos kartu, pasodino medelius per 4 dienas. Dirbdama atskirai, viena iš tų grupių galėtų pasodinti tiek pat medelių 6 dienomis greičiau už kitą. Per kiek dienų galėtų tą darbą atlikti kiekviena grupė, dirbdama atskirai?

b) Vienas kombainininkas gali nuimti rugių derlių 24 valandomis greičiau už kitą. Dirbdami kartu, jie nuimtų derlių nuo to paties sklypo per 35 valandas. Per kiek laiko nuimtų derlių kiekvienas kombainininkas, dirbdamas atskirai?

110. a) Vienu maršrutu pradėjo kursuoti nauji troleibusai. Jų vidutinis greitis 5 km/h didesnis negu senųjų troleibusų. Todėl 20 km maršrutą naujas troleibusas nuvažiuoja 12 minučių greičiau negu senasis. Koks naujojo ir koks senojo troleibusų greičiai?

b) Motociklininkas 12 minučių sugaišo degalinėje. Po to, padidinęs greitį 15 km/h, 60 km kelyje kompensavo prarastą laiką. Kokiu greičiu motociklininkas važiavo iki sustojimo degalinėje ir kokiu — po?

111. a) Mūrininkų brigada turėjo sumūryti 432 m^3 plytų, tačiau susirgus 4 mūrininkams, kiekvienam dirbusiam mūrininkui teko sumūryti 9 m^3 plytų daugiau, negu buvo jam numatyta iš pradžių. Kiek mūrininkų dirbo ir po kiek kubinių metrų plytų sumūrijo kiekvienas iš jų?

b) Darbininkų brigada turėjo pagaminti 720 detalių. Visi brigados darbininkai turėjo pagaminti po vienodą kiekį detalių. Tačiau trims darbininkams susirgus, kiekvienas iš likusiųjų, kad įvykdytų visą užduotį, turėjo pagaminti po 40 detalių daugiau. Kiek darbininkų buvo brigadoje ir po kiek detalių jie planavo pagaminti?

112. Kurie iš skaičių -4; -2; 0; 1; 2; 5; 6 yra nelygybių sistemos sprendiniai:

a) $\begin{cases} x+4>0, \\ 2x-3<1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ 5x-5<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-5\leqslant 0, \\ -2x>-8? \end{cases}$

113. Nelygybių sistemos sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje, o atsakymą užrašykite intervalu:

a) $\begin{cases} x>-2, \\ x<5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x\leqslant 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x>6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\leqslant 6, \\ x\geqslant 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x<5, \\ x\leqslant 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x\leqslant -2, \\ x\geqslant 3 \end{cases}$

114. Išspręskite nelygybių sistemą ir atsakymą užrašykite intervalu:

a) $\begin{cases} 2x\leqslant 10, \\ 3x\geqslant -12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-14\geqslant 0, \\ -2x\leqslant 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3-2x\geqslant 0, \\ 4x+8<0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}5x+6\leqslant 0, \\ 4-3x>0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5-3x>8-x, \\ 2x-18>0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3-5x<x+7, \\ 2x+1\leqslant x+2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 13+4z \geqslant z-5, \\ 2-z < 2z-1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ -3x \geqslant -18 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2(y-1)-3(y-2) < y, \\ 6y < 20-(y-5) \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x-(x-4) < 6, \\ x > 3(2x-1)+18 \end{cases}$

k) $\begin{cases} (x+1)^2-(x-1)^2 > 10, \\ 6 < x^2-x(x-8) \end{cases}$

l) $\begin{cases} (x+2)(x-2) < (4-x)^2, \\ 6+6{,}2x \geqslant 12-1{,}8x \end{cases}$

m) $\begin{cases} y^2-(y-3)^2 \geqslant 9, \\ (y-4)^2-y(y-4) > 6 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \frac{1}{7}x \geqslant 2, \\ \frac{3}{11}x \geqslant 3 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \frac{2a-3}{5} \geqslant 4a, \\ 0{,}2a-6 \leqslant 24 \end{cases}$

115. Išspręskite nelygybių sistemą ir nurodykite visus sveikuosius skaičius, kurie yra nelygybių sistemos sprendiniai:

a) $\begin{cases} 3-2x < 15, \\ 4x \leqslant 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4-6x \leqslant 16, \\ 11 < 10-5x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7-42x < 0, \\ 0{,}5 > 0{,}1x. \end{cases}$

116. Išspręskite dvigubąją nelygybę:

a) $10 < x-4 \leqslant 16$ b) $-2 < 3-4x < 2$

c) $-12 \leqslant 5(2x-3) \leqslant -6$ d) $8 < 4-x < 0$

117. Su kuriomis x reikšmėmis:

a) reiškinio $4-5x$ reikšmės priklauso intervalui $(-8; 8)$;

b) reiškinio $\frac{4x+3}{5}$ reikšmės priklauso intervalui $[3; 7)$?

118. a) Jei turistai kas dieną nueitų 5 km daugiau, tai per 5 dienas jie nukeliautų daugiau negu 90 km. Jei jie kas dieną nueitų 5 km mažiau, tai per 6 dienas nukeliautų mažiau negu 60 km. Kiek kilometrų turistai galėjo nueiti per dieną?

b) Jei turistai kas dieną nuplauktų 6 km daugiau, tai per 7 dienas jie įveiktų daugiau kaip 140 km. Jei jie kas dieną nuplauktų 6 km mažiau, tai per 8 dienas įveiktų mažiau kaip 120 km. Kiek kilometrų turistai galėjo nuplaukti per dieną?

119. Stačiakampio kraštinės ilgis lygus 20 cm. Koks gali būti kitos kraštinės ilgis, kad stačiakampio perimetras būtų mažesnis už perimetrą kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 25 cm, bet didesnis už perimetrą kito kvadrato, kurio kraštinės ilgis yra 20 cm?

120. Sumaišyta 12 kg saldainių „Obuolys“ su 10 kg saldainių „Kriaušė“. Kilogramas saldainių „Obuolys“ kainuoja 16 litų, o kilogramas mišinio — daugiau negu 14 litų, bet mažiau negu 18 litų. Kiek gali kainuoti 1 kg saldainių „Kriaušė“?

4 Funkcijos

Kai vienas dydis (y) priklauso nuo kito dydžio (x) ir kiekvieną x reikšmę atitinka vienintelė y reikšmė, tai tokia priklausomybė vadinama funkcine priklausomybe. Norėdami pažymėti, kad kintamasis y yra kintamojo x funkcija, rašome:

$$y = f(x);$$

x — nepriklausomas kintamasis, arba argumentas;
y — priklausomas kintamasis, arba funkcija.

Funkcijos *apibrėžimo sritį* sudaro visos reikšmės, kurias įgyja nepriklausomas kintamasis. Funkcijos apibrėžimo sritis žymima $D(f)$.

Funkcijos *reikšmių sritį* sudaro visos reikšmės, kurias įgyja priklausomas kintamasis. Funkcijos reikšmių sritis žymima $E(f)$.

Funkcijos nusakomos įvairiai: žodžiais, formule, lentele ar grafiku.
Funkcijos $y = f(x)$ *grafiku* vadiname koordinačių plokštumos taškų $(x; f(x))$ aibę. Funkcijos grafiko taškų abscisių x visuma sudaro funkcijos apibrėžimo sritį, o ordinačių visuma ($y = f(x)$) — reikšmių sritį.
Norint rasti funkcijos grafiko ir x ašies susikirtimo taškų abscises, reikia rasti tas argumento reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmė lygi nuliui, t. y. rasti lygties $f(x) = 0$ sprendinius.
Norint rasti funkcijos grafiko ir y ašies susikirtimo taško ordinatę, reikia rasti funkcijos reikšmę, kai argumento reikšmė lygi nuliui, t. y. apskaičiuoti $f(0)$.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama *didėjančia* apibrėžimo srityje (intervale), jeigu su bet kuriais apibrėžimo srities (intervalo) skaičiais x_1 ir x_2 ($x_2 > x_1$) teisinga nelygybė $f(x_2) > f(x_1)$; funkcija $y = f(x)$ vadinama *mažėjančia* apibrėžimo srityje (intervale), jeigu su bet kuriais apibrėžimo srities (intervalo) skaičiais x_1 ir x_2 ($x_2 > x_1$) teisinga nelygybė $f(x_2) < f(x_1)$.

Funkcija $y = f(x)$, kurios apibrėžimo sritis simetriška koordinačių pradžios taško atžvilgiu, vadinama:

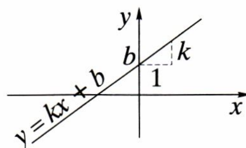
- *lygine*, jei su kiekvienu x iš apibrėžimo srities galioja lygybė $f(-x) = f(x)$. Lyginės funkcijos grafikas simetriškas y ašies atžvilgiu.
- *nelygine*, jei su kiekvienu x iš apibrėžimo srities galioja lygybė $f(-x) = -f(x)$. Nelyginės funkcijos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Funkcija $f(x) = kx + b$ (tiesinė funkcija)

Funkcija, kurią galima užrašyti formule $f(x) = kx + b$, čia k ir b — skaičiai, vadinama *tiesine*. Jos apibrėžimo sritis — visi skaičiai, t. y. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

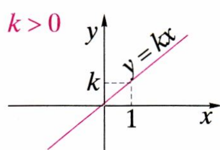
Funkcijos $f(x) = kx + b$ grafikas yra tiesė. Skaičius k parodo, kiek pasikeičia funkcijos reikšmė, argumento reikšmei padidėjus 1; skaičius k vadinamas tiesės $y = kx + b$ krypties koeficientu.

Skaičius b parodo ordinatę taško, kuriame tiesė $y = kx + b$ kerta y ašį.

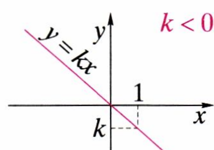


Kai $b = 0$, tai turime funkciją $f(x) = kx$.

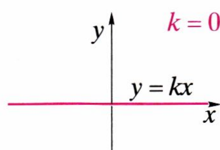
Tiesė $y = kx$ eina per koordinačių pradžios tašką (0; 0).



Tiesė eina per I ir III ketvirčius

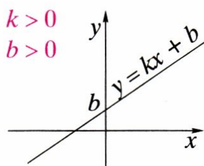


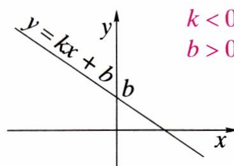
Tiesė eina per II ir IV ketvirčius

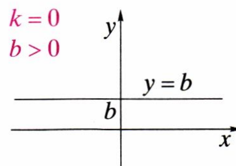


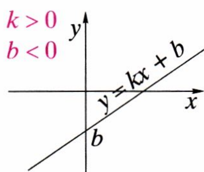
Tiesė sutampa su abscisių (Ox) ašimi

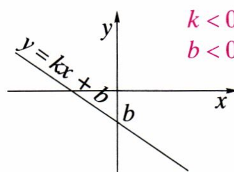
Kai $b \neq 0$, tai tiesę $y = kx + b$ galima gauti pastūmus tiesę $y = kx$ atstumu $|b|$ aukštyn, kai $b > 0$, arba žemyn, kai $b < 0$ (lygiagrečiai y ašiai).

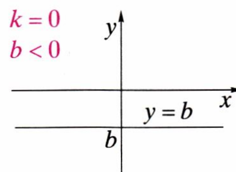












Tiesės $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$:

- yra lygiagrečios, jei $k_1 = k_2$, o $b_1 \neq b_2$;
- sutampa, jei $k_1 = k_2$ ir $b_1 = b_2$;
- susikerta, jei $k_1 \neq k_2$, o b_1 ir b_2 — bet kokie.

Funkcija $f(x) = kx + b$ yra:

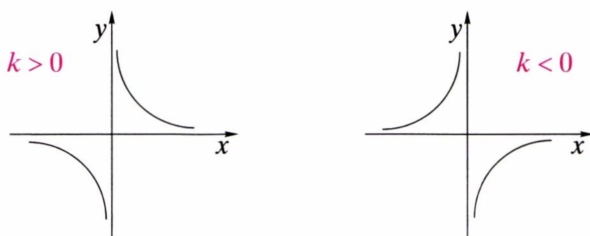
- didėjanti, kai $k > 0$;
- mažėjanti, kai $k < 0$;
- pastovi, kai $k = 0$;
- lyginė, kai $k = 0$;
- nelyginė, kai $b = 0$, $k \neq 0$;
- nei lyginė, nei nelyginė, kai $b \neq 0$, $k \neq 0$.

Funkcijos $f(x) = kx + b$ reikšmių sritis yra:

- visi skaičiai ($E(f) = \boldsymbol{R}$), kai $k \neq 0$;
- skaičius b ($E(f) = b$), kai $k = 0$.

Funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

Funkcijos $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis — visi skaičiai, išskyrus nulį, t. y. $D(f) = (-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$. Funkcija nelyginė, jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu. Šios funkcijos grafikas vadinamas *hiperbole*.
Kai $k > 0$, hiperbolė yra I ir III ketvirčiuose, kai $k < 0$ — II ir IV ketvirčiuose.

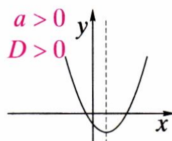


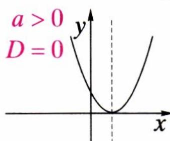
Kai $k > 0$, funkcija $f(x) = \frac{k}{x}$ intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(0; +\infty)$ mažėja; kai $k < 0$, tai ji tuose intervaluose didėja.

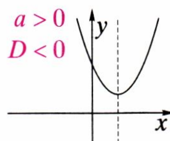
Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ (**kvadratinė funkcija**)

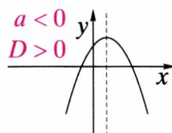
Funkcija, kurią galima užrašyti formule $f(x) = ax^2 + bx + c$, kur a, b ir c — skaičiai ($a \neq 0$), vadinama *kvadratine*. Jos apibrėžimo sritis — visi skaičiai, t. y. $D(f) = \boldsymbol{R}$.
Kvadratinės funkcijos grafikas vadinamas *parabole*.
Kai $a > 0$, tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn;
kai $a < 0$, tai parabolės šakos nukreiptos žemyn.
$D = b^2 - 4ac$ — kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ diskriminantas.
Kai $D > 0$, tai parabolė kerta x ašį dviejuose taškuose;
kai $D < 0$, tai parabolė nekerta x ašies;
kai $D = 0$, tai parabolė liečia x ašį (parabolės viršūnė yra x ašyje).

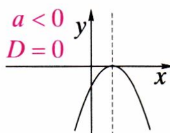
Parabolės viršūnės koordinatės $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$.
c — ordinatė taško, kuriame parabolė kerta y ašį.
Parabolė yra simetriška tiesės $x = -\frac{b}{2a}$ atžvilgiu.

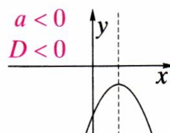










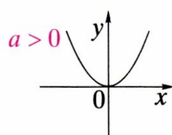


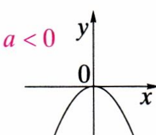
Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:
- kai $a > 0$, mažėja intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ ir didėja intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
- kai $a < 0$, didėja intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ ir mažėja intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
- kai $b = 0$, yra lyginė, kai $b \neq 0$ — nei lyginė, nei nelyginė.

Funkcijos $f(x) = ax^2 + bx + c$ reikšmių sritis yra intervalas:
- $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}; +\infty\right)$, kai $a > 0$;
- $\left(-\infty; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, kai $a < 0$.

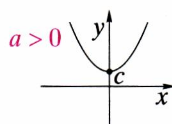
Atskiri kvadratinės funkcijos atvejai
Kai kvadratinės funkcijos $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ bent vienas iš koeficientų b ir c lygus nuliui, tai funkcija vadinama *nepilnąja* kvadratine funkcija.

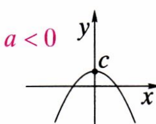
$f(x) = ax^2$
Parabolės $y = ax^2$ viršūnės koordinatės $(0; 0)$. Funkcija $f(x) = ax^2$ yra lyginė. Grafikas yra simetriškas y ašies atžvilgiu.





$f(x) = ax^2 + c$ $(c \neq 0)$
Parabolės $y = ax^2 + c$ viršūnės koordinatės $(0; c)$. Funkcija $f(x) = ax^2 + c$ yra lyginė. Grafikas yra simetriškas y ašies atžvilgiu.

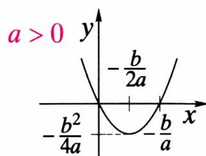




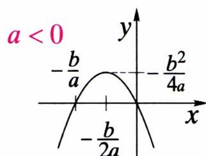
Parabolę $y = ax^2 + c$ galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2$ atstumu $|c|$ aukštyn, kai $c > 0$, arba žemyn, kai $c < 0$.

$f(x) = ax^2 + bx \ (b \neq 0)$

Parabolė kerta x ašį taškuose 0 ir $-\frac{b}{a}$. Jos viršūnės koordinatės $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$.
Tiesė $x = -\frac{b}{2a}$ — parabolės $y = ax^2 + bx$ simetrijos ašis.



a ir *b* — skirtingų ženklų

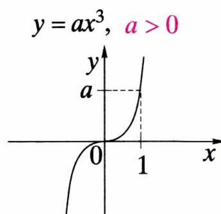


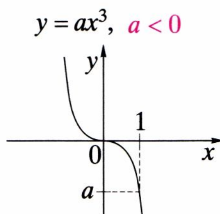
a ir *b* — vienodų ženklų

Parabolę $y = ax^2 + bx + c$ galima gauti pastūmus parabolę $y = ax^2 + bx$ atstumu $|c|$ aukštyn, kai $c > 0$, arba žemyn, kai $c < 0$.

Funkcija $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$

Funkcijos $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis — visi skaičiai, t. y. $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{R}$. Jos grafikas kartais vadinamas *kubine parabole*.
Kai $a > 0$, funkcija didėja, kai $a < 0$ — mažėja visoje apibrėžimo srityje.
Kubinė parabolė eina per koordinačių pradžios tašką (0; 0).
Kai $a > 0$, kubinė parabolė yra I ir III ketvirčiuose, kai $a < 0$ — II ir IV ketvirčiuose.

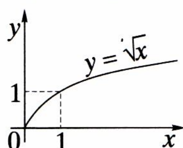




Funkcija $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$ yra nelyginė. Grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

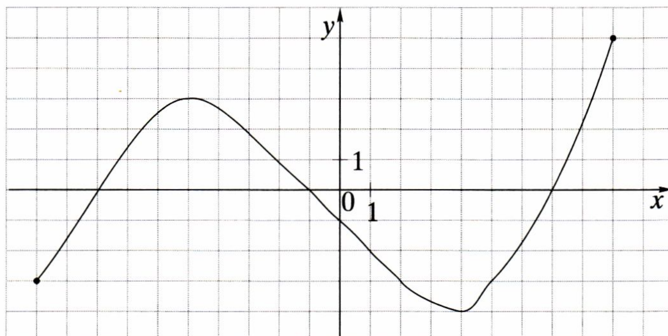
Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$

Funkcijos $f(x) = \sqrt{x}$ apibrėžimo ir reikšmių sritį sudaro visi neneigiami skaičiai, t. y.: $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$.
Funkcija didėja visoje apibrėžimo srityje.



Pratimai ir uždaviniai

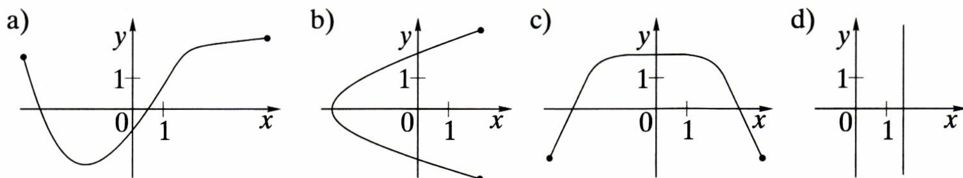
121. Nubraižytas funkcijos $y = f(x)$ grafikas:



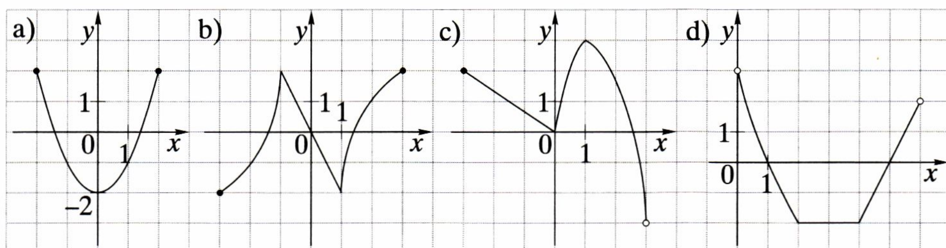
Remdamiesi grafiku, nurodykite:

a) funkcijos apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį;
b) su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmė lygi nuliui;
c) su kuriomis x reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos; neigiamos;
d) funkcijos didėjimo intervalus; mažėjimo intervalus;
e) didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes;
f) su kuriomis argumento reikšmėmis funkcijos reikšmė lygi -3;
g) funkcijos reikšmę, kai argumento reikšmė lygi 1.

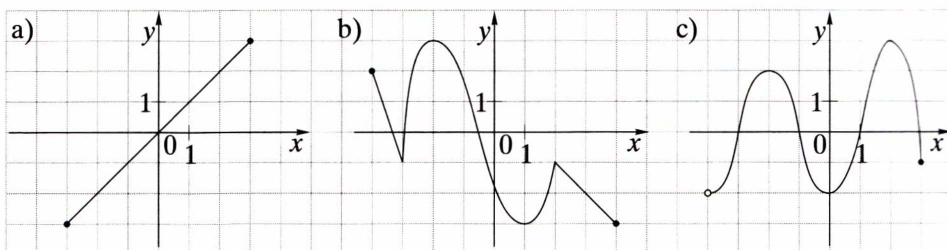
122. Ar duotoji kreivė yra funkcijos grafikas?



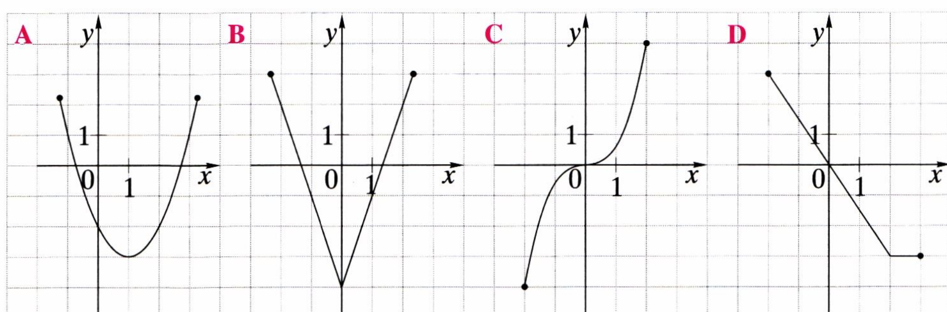
123. Remdamiesi funkcijos grafiku nurodykite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus:



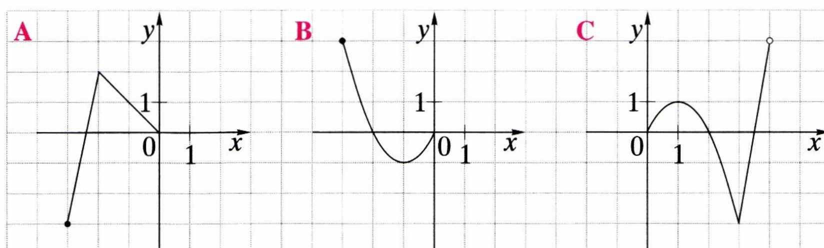
124. Remdamiesi funkcijos grafiku nurodykite funkcijos apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį:



125. Kuris grafikas yra lyginės funkcijos, kuris — nelyginės funkcijos, kuris nėra nei lyginės, nei nelyginės funkcijos?



126. Nubraižyta funkcijos $y = f(x)$ grafiko dalis. Užbaikite braižyti funkcijos $y = f(x)$ grafiką, jeigu žinoma, kad funkcija yra:
a) lyginė; b) nelyginė.



127. Nustatykite, kurios iš duotųjų funkcijų yra lyginės, kurios — nelyginės, kurios nėra nei lyginės, nei nelyginės:

a) $f(x) = 2x - 2$ b) $f(x) = \frac{2}{x}$ c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ f) $f(x) = |x^3|$

g) $f(x) = -3x$ h) $f(x) = 2x - x^2$ i) $f(x) = (x - 1)^2$

128. Duota funkcija $f(x)$:

a) $f(x) = 3 - 2x$ b) $f(x) = 5x^3$ c) $f(x) = -3x^2 + 1$

d) $f(x) = 4x$ e) $f(x) = -\frac{3}{x}$ f) $f(x) = |2x + 1|$

g) $f(x) = 2x^2 - 2x$ h) $f(x) = \frac{2-3x}{4}$ i) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Kiekvienu atveju apskaičiuokite funkcijos reikšmę, kai argumento reikšmė lygi:
1) $-0{,}5$; 2) 1.

129. Duota funkcija $f(x)$:

a) $f(x) = 9x$ b) $f(x) = 4 - x$ c) $f(x) = -0{,}5x^2$

d) $f(x) = x^2 - 10$ e) $f(x) = x^2 - 6x$ f) $f(x) = -(x + 2)^2$

g) $f(x) = \frac{-x^2+4x-6}{2}$ h) $f(x) = \frac{x^3}{3}$ i) $f(x) = -\sqrt{x}$

Kiekvienu atveju apskaičiuokite argumento reikšmę, su kuria duotos funkcijos reikšmė lygi:
1) -9; 2) 0.

130. Raskite koordinates taškų, kuriuose funkcijos $f(x)$ grafikas kerta koordinačių ašis, jei:

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$ b) $f(x) = x^2 - 25$ c) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

d) $f(x) = \frac{2x+5}{3}$ e) $f(x) = 3x - x^2$ f) $f(x) = x^2 + 2x + 10$

g) $f(x) = (2x + 1)^2$ h) $f(x) = |x + 2|$ i) $f(x) = -(x - 1)^2 - 10$

131. Kurie iš taškų $A(1; -4)$, $B(3; 1)$, $C(0; 1)$, $D(0; 0)$, $E(-0{,}5; 8)$ ir $F(-2; 0)$ priklauso grafikui funkcijos:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x$ b) $f(x) = 0{,}5x + 1$ c) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ e) $f(x) = -\frac{4}{x}$ f) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

g) $f(x) = \frac{8}{x}$ h) $f(x) = |1 - 16x|$ i) $f(x) = -x^2 - 3$?

132. Raskite koeficiento k reikšmę, jei žinoma, kad funkcijos $f(x)$ grafikas eina per tašką M:

a) $f(x) = kx - 1$, $M(-1; -2)$ b) $f(x) = kx^2$, $M\left(-2; \frac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = kx^2 + 1$, $M(-3; -8)$ d) $f(x) = k(x + 2)^2$, $M(2; 8)$

e) $f(x) = kx^2 - 4x$, $M(-1; 3)$ f) $f(x) = \frac{k}{x}$, $M(3; -1)$

g) $f(x) = kx^3$, $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ h) $f(x) = k\sqrt{x}$, $M\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

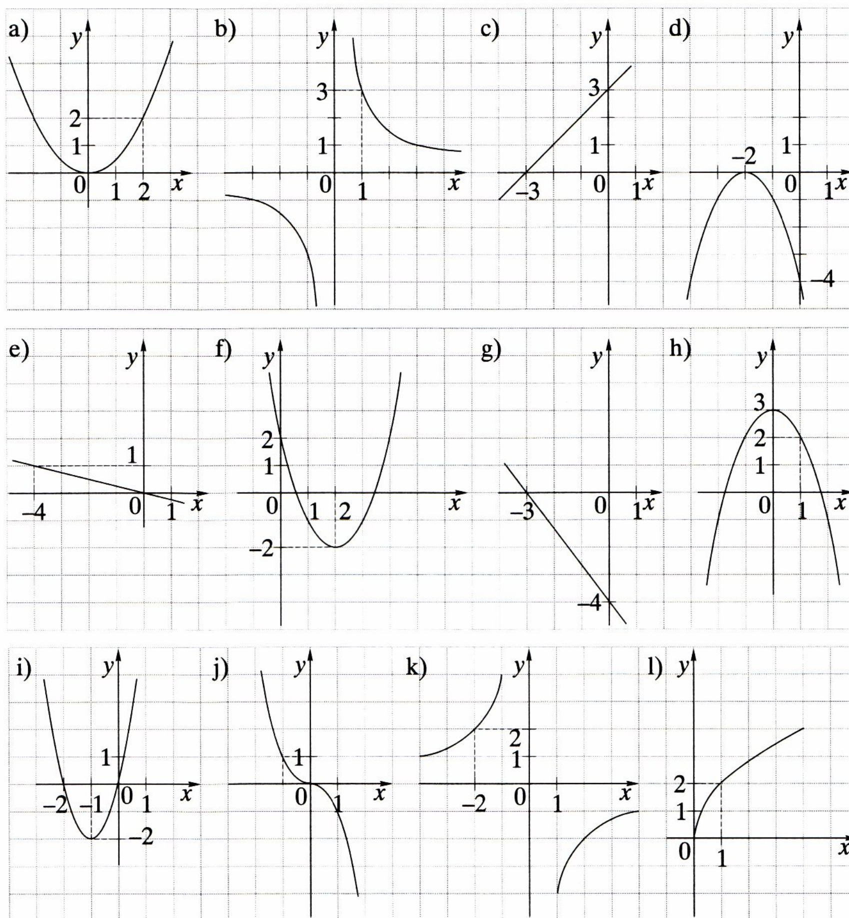
133. Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį:

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = \frac{2x+1}{7}$ c) $f(x) = \frac{x+4}{2x-3}$

d) $f(x) = 3x^2 - 5x$ e) $f(x) = \sqrt{-2x - 3}$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

g) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ i) $f(x) = -4x^3$

134. Remdamiesi funkcijų $f(x) = kx + b$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, $h(x) = ax^3$, $u(x) = \frac{k}{x}$ ir $v(x) = a\sqrt{x}$ grafikais funkciją užrašykite formule:



135. Nubraižykite funkcijos grafiką:

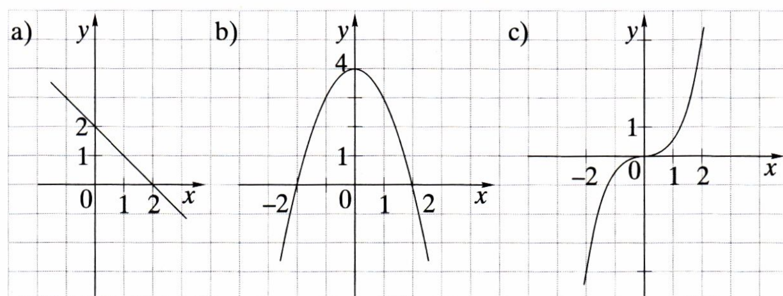
a) $f(x) = -2{,}5x$ b) $f(x) = 3x - 4$ c) $f(x) = -x + 3$

d) $f(x) = -2x^2$ e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3$ f) $f(x) = 2(x + 1)^2$

g) $f(x) = -x^2 + 2x$ h) $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ i) $f(x) = \frac{4}{x}$

j) $f(x) = -\frac{2}{x}$ k) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ l) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

136. Nubraižykite funkcijos $|f(x)|$ grafiką, kai duotas funkcijos $f(x)$ grafikas:



137. Nubraižykite funkcijos $|f(x)|$ grafiką, jei:

a) $f(x) = x - 1$ b) $-2x - 3$ c) $f(x) = x^2 - 3$

d) $f(x) = -x^2 + 2x$ e) $f(x) = -(x + 2)^2$ f) $f(x) = (x - 1)^2 - 3$

g) $f(x) = -\frac{6}{x}$ h) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ i) $f(x) = -2\sqrt{x}$

138. Vertikalaus objekto šešėlio ilgis yra tiesiogiai proporcingas objekto aukščiui. 3,5 m vertikalaus stulpo šešėlis žemėje yra 5,6 m ilgio. Apskaičiuokite proporcingumo koeficientą ir nubraižykite objekto šešėlio ilgio priklausomybės nuo jo aukščio grafiką. Remdamiesi grafiku apytiksliai nustatykite:

a) koks yra 28 m eglės šešėlio ilgis;
b) beržo aukštį, jei jo šešėlio ilgis yra 32 m.

139. Automobilis, važiuodamas 80 km/h greičiu, iš miesto A į miestą B atvyko per 4 h.

a) Formule užrašykite laiko priklausomybę nuo greičio.
b) Kiek laiko automobilis sugaiš grįždamas, jeigu jis važiuos vidutiniu 100 km/h greičiu?
c) Kokiu greičiu turi važiuoti automobilis, kad kelionėje užtruktų ne ilgiau kaip 2 h 40 min?

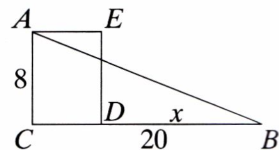
140. Kvadrato kraštinės ilgis yra x cm.

a) Įrodykite, kad kvadrato įstrižainės ilgį d galima apskaičiuoti pagal formulę $d(x) = \sqrt{2}x$.
b) Apskaičiuokite $d(5)$; $d(6\sqrt{2})$.
c) Kam lygi kraštinė kvadrato, kurio įstrižainės ilgis yra $\sqrt{12}$ cm?

141. Vienos stačiakampio kraštinės ilgis yra x cm, o kita kraštinė 3 cm ilgesnė.

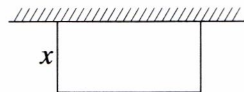
a) Formule užrašykite stačiakampio ploto S priklausomybę nuo kraštinės ilgio x (cm).
b) Apskaičiuokite $S(1{,}5)$; $S(4)$.
c) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas lygus 4 cm^2?

142. Trikampis ABC statusis ($\angle C = 90°$), $AC = 8\,\text{cm}$, $BC = 20\,\text{cm}$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas D. Pasižymėkite atkarpą $DB = x$.



a) Stačiakampio $ACDE$ plotą $S(x)$ užrašykite formule.
b) Apskaičiuokite $S(3{,}5)$; $S(7)$.
c) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas lygus $136\,\text{cm}^2$?
d) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas lygus trikampio ABC plotui?
e) Su kuria x reikšme stačiakampio plotas lygus $\frac{2}{5}$ trikampio ABC ploto?

143. Iš trijų pusių reikia aptverti tvorele stačiakampę aikštelę, esančią prie sienos. Tvorelės ilgis turi būti 80 metrų.



a) Vieno aikštelės krašto ilgį pažymėję x m, išreikškite x-u kito krašto ilgį.
b) Formule užrašykite aikštelės ploto S priklausomybę nuo krašto ilgio x.
c) Su kuria x reikšme $S(x)$ įgyja didžiausią reikšmę?
d) Koks turėtų būti aikštelės ilgis ir plotis, kad aikštelės plotas būtų didžiausias?

144. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų bendrų taškų koordinates, jei:
a) $f(x) = 5x - 4$, $g(x) = -2x + 3$;
b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $g(x) = 3x - 4$;
c) $f(x) = 3x^2 - 3x$, $g(x) = (x - 1)^2$;
d) $f(x) = 4 - x$, $g(x) = \frac{4}{x}$;
e) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 3x^2$;
f) $f(x) = -2x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

145. Grafiniu būdu nustatykite lygties sprendinių skaičių:

a) $\frac{1}{2}x^2 - 4 = -\frac{1}{x}$ b) $|x| = x - 2$ c) $|x| = 3x$
d) $-\frac{1}{2}x^3 = -2x$ e) $\sqrt{x} = x^3$ f) $-x + 3 = 2\sqrt{x}$

146. Grafiškai išspręskite lygtį:

a) $\frac{4}{x} = x$ b) $\left|\frac{3}{x}\right| = 2$ c) $-x^3 - 1 = 0$
d) $(x - 4)^2 + 1 = \sqrt{x}$ e) $-2x^2 = \sqrt{x}$ f) $\frac{1}{2}x^3 - 2x = 0$
g) $-\sqrt{x} = (x + 3)^2$ h) $-\frac{4}{x} + \frac{1}{2}x^3 = 0$ i) $\left|\frac{2}{x}\right| = -x^2$

147. Grafiškai išspręskite nelygybę:

a) $\sqrt{x} > 1$ b) $2\sqrt{x} \leqslant 2$ c) $-\sqrt{x} \geqslant x$
d) $-\frac{1}{4}x^3 < -\frac{3}{x}$ e) $-x^2 + 1 > |x + 2|$ f) $|x - 1| \geqslant -x^2$

5 Ekonomikos elementai

Atlyginimas ir atskaitymai

Už bet kurį atliktą darbą turi būti mokamas atlyginimas. Jis gali būti tarifinis arba pareiginis.

Tarifinis atlyginimas — tai pinigų suma, apskaičiuojama darbuotojui priklausomai nuo dirbtų valandų skaičiaus pagal sutartą valandinį atlygį.

Pareiginis atlyginimas — tai pastovi pinigų suma, mokama darbuotojui kas mėnesį (kas dvi savaites arba kas savaitę). Pareiginio atlyginimo dydis priklauso nuo bazinės mėnesinės algos dydžio ir darbuotojo kvalifikacinio koeficiento.

Bazinė mėnesinė alga — Vyriausybės nustatyta pinigų suma. 2001 metais ji buvo 105 Lt.

Kvalifikacinio koeficiento dydis priklauso nuo užimamų pareigų ir kvalifikacijos.

Tarifinis atlyginimas = Valandinis atlygis (Lt) × Darbo laikas

Pareiginis atlyginimas = Bazinė mėnesinė alga × Kvalifikacinis koeficientas

Kiekvienas darbuotojas iš gaunamo atlyginimo moka *pajamų* ir *socialinio draudimo* mokesčius.

Pajamų mokestį (procentais) nustato Vyriausybė. Jis skaičiuojamas nuo apskaičiuoto atlyginimo dalies, viršijančios neapmokestinamąjį minimumą. Šį minimumą taip pat nustato Vyriausybė; jis gali būti skirtingas įvairių socialinių kategorijų žmonėms. Standartinis neapmokestinamasis minimumas 2001 m. buvo 214 Lt, o pajamų mokesčio tarifas — 33%.

Socialiniam draudimui (SODRAI) darbuotojas 2001 m. mokėjo 3% apskaičiuoto atlyginimo.

Biudžetas

Biudžetas tai asmens, šeimos, įmonės arba šalies tam tikro laikotarpio *pajamų* ir *išlaidų* paskirstymas. Biudžeto sudarymas padeda numatyti pajamų šaltinius, planuoti išlaidas, taupyti. Asmens arba šeimos pajamas paprastai sudaro *atlyginimas* už darbą, indėlių bankuose *palūkanos*, įvairios *įplaukos iš vertybinių popierių* ir kitos. Asmens arba šeimos *pastoviąsias išlaidas* sudaro išlaidos būstui, maistui, transportui, mokymuisi, o *kintamąsias išlaidas* — visos kitos: drabužiams ir avalynei, medicinos paslaugoms, pramogoms, saldumynams, laisvanoriškam draudimui ir t. t.

Biudžetas gali būti *subalansuotas*, *perteklinis* arba *deficitinis*. Kai pajamos yra lygios išlaidoms, biudžetas vadinamas subalansuotu, kai pajamos viršija išlaidas — pertekliniu, kai pajamos mažesnės už išlaidas — deficitiniu.

Palūkanos

Palūkanos tai pinigai, kurie gaunami už paskolintus (padėtus į banką) pinigus.
Palūkanų *norma — metinių palūkanų* dydis, išreikštas procentais.
Yra dviejų rūšių palūkanos: paprastosios ir sudėtinės.
Paprastosios palūkanos skaičiuojamos tik nuo pradinės (paskolintos) sumos.
Jei suma S skolinama t metų laikotarpiui su p procentų (metinių) *paprastųjų* palūkanų norma, tai palūkanos P_t už t metų apskaičiuojamos pagal formulę:

$$P_t = S \cdot \frac{p}{100} \cdot t,$$

o po t metų iš viso bus gauta suma S_t, lygi

$$S_t = S + P_t = S\left(1 + \frac{p}{100} \cdot t\right).$$

Sudėtinės palūkanos kiekvieną kartą skaičiuojamos nuo priaugusios (likusios) sumos.
Jei suma S skolinama t metų laikotarpiui su p procentų (metinių) *sudėtinių* palūkanų norma, tai po t metų suma S_t bus

$$S_t = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Palūkanos šiuo atveju yra

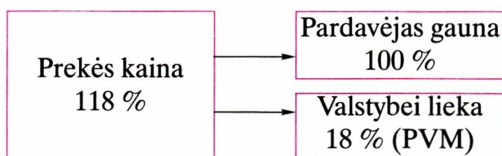
$$P_t = S_t - S, \quad \text{t. y.} \quad P_t = S\left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t - 1\right).$$

Yra dvi pagrindinės bankuose laikomų indėlių rūšys: *indėliai iki pareikalavimo* ir *terminuotieji indėliai*.
Indėlius iki pareikalavimo galima atsiimti bet kuriuo metu. Paprastai už juos mokamos nedidelės palūkanos. Terminuotuosius indėlius galima atsiimti tik praėjus sutartam laikui. Už juos paprastai mokamos didesnės palūkanos negu už indėlius iki pareikalavimo, bet sumanius atsiimti indėlį anksčiau, negu buvo sutarta su banku, gali būti nemokamos jokios palūkanos.

Kaina, pajamos, pelnas

Prekės ar paslaugos *kaina* — pinigų suma, kurią mokame už įsigyjamą prekę ar gaunamas paslaugas.
Visos prekės ir paslaugos yra apmokestinamos pridėtosios vertės mokesčiu (PVM). Jį sumoka galutinis prekės pirkėjas ar paslaugos gavėjas.

PVM dydį nustato Vyriausybė. Šio mokesčio pagrindinis tarifas 2001 m. buvo 18% nuo prekės kainos, į kurią *neįskaičiuotas* PVM (nuo kainos be PVM).



Prekės ar paslaugos *savikaina* — suma išlaidų, kurių turi prekės gamintojas ar paslaugos teikėjas.
Didmeninė kaina — kaina, už kurią prekių gamintojas parduoda savo prekes *urmu* (dideliais kiekiais), t. y. pardavėjas įsigyja prekes urmu (dideliais kiekiais).
Mažmeninė kaina — kaina, už kurią pardavėjas parduoda prekę *mažmena* (mažais kiekiais).
Didmeninė kaina yra didesnė už savikainą, o mažmeninė kaina yra didesnė už didmeninę kainą.

Mažmeninė kaina − Didmeninė kaina = Antkainis

Procentinis antkainis — antkainis, išreikštas procentais. Jis parodo, kurią prekės didmeninės kainos dalį (procentais) sudaro antkainis.
Nuolaida — prekės buvusios kainos ir sumažintos kainos skirtumas.
Procentinė nuolaida — nuolaida, išreikšta procentais. Ji parodo, kurią pradinės kainos dalį procentais sudaro nuolaida.
Įplaukos — pinigų suma, gauta pardavus prekes (su PVM).
Pajamos — įplaukų dalis, kurią sudaro pinigai, gauti iš antkainių pardavus prekes (be PVM).
Išlaidos (kaštai) — įmonės išlaidos, susidariusios gaminant, parduodant prekes (patalpų nuoma, įranga, reklama, atlyginimai ir kt.).

Pajamos − Išlaidos = Pelnas/Nuostolis

Jei pajamos viršija išlaidas, tai pajamų ir išlaidų skirtumas vadinamas pelnu, jei išlaidos viršija pajamas — *nuostoliu*.
Visos įmonės, *turinčios pelno*, moka *pelno mokestį*. Šio mokesčio tarifą nustato Vyriausybė, 2001 metais jis sudarė 24% (lengvatinis — 10%) pelno.

Pelnas − Pelno mokestis = Grynasis pelnas

Pratimai ir uždaviniai

148. Tarnautojui mokamas pareiginis atlyginimas. Tarnautojo kvalifikacinis koeficientas yra 10,5, o nustatyta bazinė mėnesinė alga yra 115 Lt. Kiek apskaičiuojama darbuotojui atlyginimo:

a) per mėnesį; b) per mėnesį su 15% priedu?

149. Darbuotojo darbo laikas per mėnesį buvo 175 valandos 40 minučių, o valandinis atlygis — 6,94 Lt. Kiek buvo apskaičiuota darbuotojui per mėnesį:

a) tarifinio atlyginimo; b) tarifinio atlyginimo su 12% priedu?

150. Darbininkui mokamas tarifinis atlyginimas. Už $168\frac{1}{6}$ h per mėnesį jam apskaičiuota 1210,8 Lt. Neapmokestinamasis minimumas yra 320 Lt.

a) Koks yra šio darbininko valandinis atlygis?
b) Kiek darbininkas moka pajamų mokesčio, jei šio mokesčio tarifas yra 33% atlyginimo dalies, viršijančios neapmokestinamąjį minimumą?
c) Kiek darbininkas moka mokesčio SODRAI (t. y. 3% apskaičiuoto atlyginimo)?
d) Kiek litų gavo darbininkas už mėnesį, atskaičius pajamų ir SODROS mokesčius?

151. Tarnautojui apskaičiuojamas pareiginis atlyginimas už mėnesį, esant nustatytai bazinei mėnesinei algai 120 Lt. Per mėnesį tarnautojas sumoka 36,72 Lt mokesčio SODRAI.

a) Koks apskaičiuotas tarnautojo pareiginis atlyginimas už mėnesį?
b) Pagal kokį kvalifikacijos koeficientą apskaičiuotas tarnautojo pareiginis atlyginimas?
c) Kiek litų pajamų mokesčio sumoka tarnautojas per mėnesį, jeigu šio mokesčio tarifas lygus 33% apskaičiuoto atlyginimo dalies, viršijančios 280 Lt neapmokestinamąjį minimumą?
d) Kiek litų gavo tarnautojas už mėnesį, atskaičius pajamų ir SODROS mokesčius?

152. Jonaitis iš atlyginimo per mėnesį moka 28,52 Lt mokestį SODRAI.

a) Kiek Jonaičiui apskaičiuojama atlyginimo per mėnesį?
b) Kiek Jonaitis sumoka pajamų mokesčio, jeigu šio mokesčio tarifas yra 33% apskaičiuoto atlyginimo dalies, viršijančios 250 Lt neapmokestinamąjį minimumą?

153. Petraitis per mėnesį moka 303,6 Lt pajamų mokestį, kurio tarifas yra 33% apskaičiuoto atlyginimo dalies, viršijančios 280 Lt neapmokestinamąjį minimumą.

a) Kiek Petraičiui apskaičiuojama atlyginimo per mėnesį?
b) Kiek Petraitis moka mokesčio SODRAI, jeigu šio mokesčio tarifas yra 3%?

154. Šeimos pajamos per mėnesį sudaro 120% išlaidų, kurios lygios 980 Lt.
a) Kiek litų pajamų turi šeima per mėnesį?
b) Kokios yra šeimos santaupos per mėnesį?
c) Per kiek mėnesių šeima gali tikėtis sutaupyti 750 Lt?

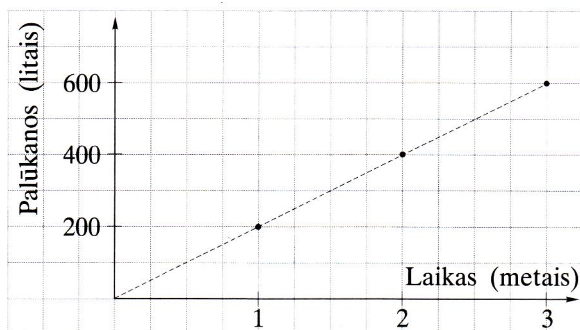
155. Jonaitis per mėnesį sutaupė 270 Lt. Kokios buvo Jonaičio pajamos ir išlaidos per mėnesį, jeigu santaupos sudarė 22,5% pajamų?

156. Petraičių šeimos mėnesinio biudžeto pastoviųjų ir kintamųjų išlaidų suma lygi 2400 Lt. Kintamosios išlaidos 40% mažesnės už pastoviąsias išlaidas, o pajamos sudaro 125% visų išlaidų sumos.
a) Kokios yra Petraičių šeimos pastoviosios išlaidos per mėnesį?
b) Kiek litų pajamų per mėnesį turi Petraičių šeima?
c) Kokios yra Petraičių šeimos santaupos per mėnesį?

157. Banke atidaryta indėlio iki pareikalavimo sąskaita su 7500 Lt. Po dvejų metų šis indėlis išaugo iki 8112 Lt sumos.
a) Kokia banko sudėtinių palūkanų norma?
b) Kiek litų (vieneto tikslumu) palūkanų bus sąskaitoje po trejų metų?
c) Kokia suma (dešimties litų tikslumu) bus sąskaitoje po penkerių metų, jeigu po trejų metų iš sąskaitos buvo nurašyta (paimta) 5000 Lt?

158. Kiek palūkanų bus gauta už paskolą po vienerių; dvejų; trejų; ketverių; penkerių paskolos metų, jei paskolinta 8000 Lt su 9% metinių:
a) paprastųjų palūkanų; b) sudėtinių palūkanų?

159. Pavaizduotas paskolos palūkanų grafikas. Remdamiesi grafiku nustatykite pasiskolintą sumą, jeigu palūkanų norma yra:
a) 10%; b) 8%.



Abiem atvejais apskaičiuokite grąžintiną paskolos sumą po 3 metų ir nubraižykite grąžintinos sumos per trejus metus grafiką.

160. Didžiosios Britanijos svarus sterlingų bankas perka po 6,39 Lt, o parduoda po 6,59 Lt.

a) Kiek svarų sterlingų galima įsigyti už 2000 Lt?

b) Kiek litų gaunama iškeitus 250 svarų sterlingų?

161. Vienu metu Lietuvos bankas buvo nustatęs tokius lito ir užsienio valiutų santykius:

Latvijos latas	—	6,4851 Lt
Lenkijos zlotas	—	0,9452 Lt
Rusijos rublis	—	0,1358 Lt
1000 Baltarusijos rublių	—	2,7174 Lt

Kiek kiekvienos kaimyninės šalies piniginių vienetų (šimtosios tikslumu) tuo metu atitiko 5000 litų?

162. Vienu metu Lietuvos bankas buvo nustatęs tokį lito (LTL) ir euro (EUR) santykį: 1 EUR = 3,7024 LTL. Vokietijos markės (DEM) ir euro santykis yra fiksuotas: 1 EUR = 1,95583 DEM.

a) Kiek litų tuo metu kainavo 2000 Vokietijos markių?

b) Kiek Vokietijos markių tuo metu kainavo 2000 LTL?

163. Džinsai parduotuvėje kainuoja 89,99 Lt, o jų procentinis antkainis yra 25%.

a) Už kiek litų šiuos džinsus įsigijo parduotuvė (kokia džinsų didmeninė kaina)?

b) Koks džinsų antkainis parduotuvėje (prekybos antkainis)?

c) Kiek litų sudaro pridėtosios vertės mokestis (PVM) pardavus džinsus, jei šio mokesčio tarifas yra 18%?

d) Kiek litų pajamų turi ši parduotuvė, pardavusi 50 vienetų džinsų ir sumokėjusi PVM?

164. Kostiumo didmeninė kaina yra 400 Lt, o procentinis antkainis parduotuvėje sudaro 30%. Pardavusi kostiumą, parduotuvė valstybei sumoka 18% pridėtosios vertės mokestį (PVM).

a) Kokia yra kostiumo mažmeninė kaina?

b) Koks kostiumo antkainis parduotuvėje?

c) Kiek litų sudaro PVM?

d) Kiek litų pajamų turi parduotuvė, pardavusi kostiumą ir sumokėjusi PVM?

e) Kiek procentų kostiumo didmeninės kainos sudaro parduotuvės pajamos pardavus kostiumą ir sumokėjus PVM?

165. Parduotuvė prekę įsigijo už 50 Lt. Už kiek litų parduotuvė turi parduoti šią prekę, kad sumokėjusi PVM, kurio tarifas yra 18%, parduotuvė turėtų:

a) 10,5 Lt pajamų; b) 13,7 Lt pajamų?

166. a) Bateliai, kurie kainuoja 88,5 Lt, šią savaitę parduodami su 7,4% nuolaida. Už kiek litų galima nusipirkti batelius šią savaitę?

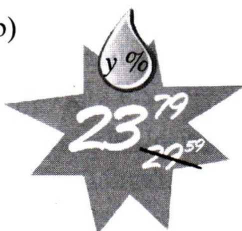
b) Birutė įsigijo batelius su 7,4% nuolaida už 87,97 Lt. Kokia buvo batelių kaina be nuolaidos?

167. Paveiksle pateiktos akcijos „Nuolaidų lašai“ prekių kainų etiketės. Apskaičiuokite, kiek procentų (šimtosios tikslumu) atpigo kiekvienas daiktas.

a)



b)



168. Prekė kainavo 120 Lt. Jos kaina buvo sumažinta keturis kartus po 5%. Kiek:

a) litų prekė kainuoja dabar; b) procentų atpigo prekė?

169. Prekė kainavo 80 Lt. Jos kaina buvo padidinta keturis kartus po 5%. Kiek:

a) litų prekė kainuoja dabar; b) procentų pabrango prekė?

170. Baldų komplekto įsigijimo (didmeninė) kaina parduotuvei yra 4000 Lt, o pardavimo (mažmeninė) kaina pirkėjui — 5500 Lt.

a) Koks baldų komplekto procentinis antkainis?

b) Koks buvo procentinis antkainis, jei baldų komplektas buvo parduotas su 5% nuolaida?

c) Kiek litų sudaro pridėtosios vertės mokestis pardavus baldų komplektą su 5% nuolaida, jeigu PVM tarifas yra 18%?

d) Kiek litų pajamų „praranda“ parduotuvė, pardavusi baldų komplektą su 5% nuolaida ir sumokėjusi PVM?

171. Baikite pildyti lentelę:

	Pajamos (Lt)	Išlaidos (Lt)	Pelnas (Lt)	Pelno mokesčio tarifas (%)	Pelno mokestis (Lt)	Grynasis pelnas (Lt)
a)	8000	7500		24		
b)	5525	5005			52	
c)		4500		24	144	
d)	3500			10	45,2	

172. Dirbtuvė per savaitę pagamina 300 detalių. Jų gamybos sąnaudų 12,6% sudaro 945 Lt. Pagamintas detales dirbtuvė parduoda parduotuvei po 30 Lt už kiekvieną detalę, o parduotuvė parduoda tas detales pirkėjams su 40% antkainiu. Parduotuvės prekybos savaitinės išlaidos realizuojant detales sudaro 10% įplaukų, gautų pardavus visas 300 detalių.
a) Kokios yra dirbtuvės detalių gamybos sąnaudos?
b) Kokia vienos detalės savikaina?
c) Kokia vienos detalės didmeninė kaina?
d) Kiek procentų uždeda dirbtuvė, parduodama detalę parduotuvei?
e) Kokia detalės mažmeninė kaina?
f) Koks detalės antkainis (litais) parduotuvėje?
g) Kiek litų įplaukų turi parduotuvė, pardavusi 300 detalių?
h) Kiek litų sudaro PVM už parduotas 300 detalių?
i) Kiek litų pajamų turi parduotuvė, pardavusi 300 detalių ir sumokėjusi PVM?
j) Kokios parduotuvės prekybos savaitinės išlaidos (litais), kurios susidaro parduodant 300 detalių?
k) Koks parduotuvės pelnas per savaitę pardavus 300 detalių?
l) Kiek litų grynojo pelno turi parduotuvė per savaitę, pardavusi 300 detalių, jeigu pelno mokesčio tarifas sudaro 24% gauto pelno?

173. Spinta kainuoja 2500 Lt. Perkant išsimokėtinai pradinis įnašas yra 1300 Lt ir 2 metus reikia mokėti po 75 Lt kas mėnesį.
a) Kokia spintos kaina perkant ją išsimokėtinai?
b) Kiek palūkanų reikia mokėti perkant spintą išsimokėtinai?
c) Kokią sumą pirkėjas „pasiskolina“ iš parduotuvės, pirkdamas spintą išsimokėtinai?
d) Kokia pirkimo išsimokėtinai paprastųjų palūkanų norma?

174. Kompiuteris kainuoja 2500 Lt. Perkant jį išsimokėtinai pradinis įnašas yra 1600 Lt ir 1,5 metų reikia mokėti po 70 Lt kas mėnesį. Ar verta šį kompiuterį pirkti išsimokėtinai, ar, pasiskolinus trūkstamus pinigus su 20% metinių sudėtinių palūkanų 1,5 metų laikotarpiui, nusipirkti iš karto?

175. Šeima sausio mėnesį suvartojo 150 kWh elektros energijos. Pusę metų kas mėnesį šeimai pavyko sutaupyti vis po 2%:
a) praėjusį mėnesį suvartotos elektros energijos kiekio;
b) sausio mėnesį suvartotos elektros energijos kiekio.
Kiek kilovatvalandžių elektros energijos suvartojo šeima birželio mėnesį ir kiek iš viso per pusę metų (1 kWh tikslumu)?

6 Statistika. Tikimybės. Kombinatorika

Duomenų rinkimas ir tvarkymas

Surinkti duomenys vadinami *imtimi*, duomenų skaičius — *imties dydžiu*.
Surinktus duomenis galima surašyti variacine eilute, dažnių lentele.
Variacinė eilutė — skaičių seka, kurios kiekvienas skaičius, pradedant antru, yra ne mažesnis už prieš jį esantį: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kur $x_k \geqslant x_{k-1}$, $k \in 2, 3, \ldots, n$.
Dažnių lentelės vienoje eilutėje surašomi skirtingi variacinės eilutės skaičiai (duomenys), o kitoje — jų dažniai (pasikartojimų skaičius).

Duomenys	x_1	x_2	...	x_k
Dažniai	m_1	m_2	...	m_k

Imties duomenis galima apibūdinti nurodant vidurkį, medianą, plotį.
Vidurkis — imties duomenų suma, padalyta iš duomenų skaičiaus:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

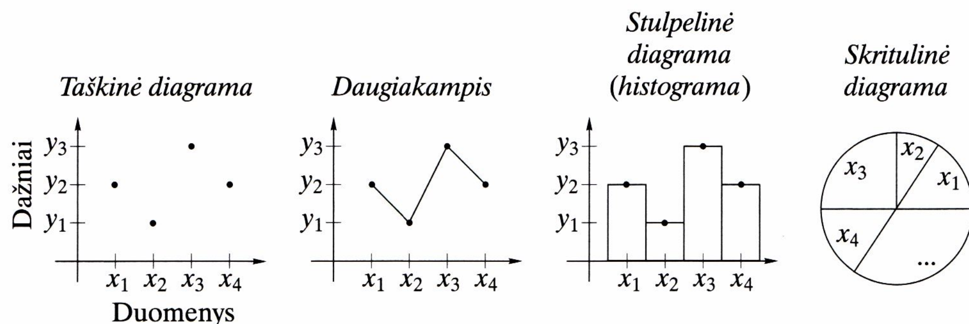
Mediana — imties variacinės eilutės vidurinysis skaičius, kai imties dydis yra nelyginis skaičius, arba dviejų viduriniųjų skaičių aritmetinis vidurkis, kai imties dydis — lyginis skaičius.
Imties *plotis* — skirtumas tarp didžiausio ir mažiausio imties duomenų: $x_k - x_1$.

Kai duomenų yra labai daug, jie dažniausiai grupuojami į intervalus.
Grupuojant duomenis *į intervalus* paprastai:

- pasirenkami vienodo ilgio intervalai;
- intervalo galai imami „patogūs“ skaičiai;
- intervalų skaičius imamas 3–12.

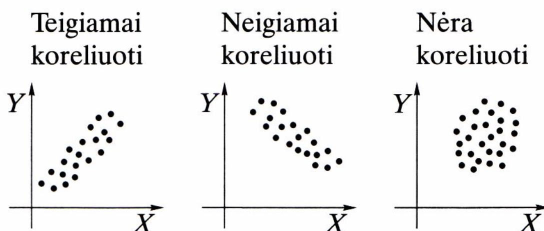
Imties duomenys dažnai vaizduojami grafiškai: taškine diagrama, daugiakampiu, stulpeline diagrama, histograma, skrituline diagrama.
Vaizduojant duomenis *taškine diagrama*, vienoje koordinačių ašyje (paprastai Ox ašyje) atidedami duomenys, o kitoje (Oy) — jų dažniai.
Daugiakampį gauname taškinės diagramos taškus paeiliui sujungę atkarpomis. Jeigu ant taškinės diagramos nubrėžiami stačiakampiai, tai gaunama stulpelinė diagrama. Jei nubrėžiami besiliečiantys stačiakampiai, kurių aukščiai lygūs dažniams (santykiniams dažniams), tuomet gauta stulpelinė diagrama vadinama *histograma*.

Vaizduojant duomenis *skrituline diagrama*, skritulys padalijamas į išpjovas, kurių plotas proporcingas duomenų dažniams.



Galima tirti ir daugiau negu vieną to paties objekto požymį.
Jei tarp požymių X ir Y yra tiesinė priklausomybė, t. y. stebimų požymių reikšmės, pavaizduotos koordinačių plokštumoje, grupuojasi apie kurią nors pasvirąją tiesę, tai sakoma, kad tie požymiai yra *koreliuoti*. Jei tos tiesės krypties koeficientas yra teigiamas (tiesė su teigiamąja Ox ašimi sudaro smailų kampą), tai požymiai yra teigiamai koreliuoti, jei neigiamas (tiesė su teigiamąja Ox ašimi sudaro buką kampą) — neigiamai koreliuoti.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n



Bandymai

Atsitiktiniais įvykiais vadinami tokie įvykiai, kurie atliekant bandymą gali įvykti, o gali ir neįvykti.
Elementariaisiais įvykiais vadinami tokie atsitiktiniai įvykiai, kurie nebeskaidomi į smulkesnius atsitiktinius įvykius.
Įvykis, kuris negali įvykti atliekant bandymą, vadinamas *negalimuoju*.
Įvykis, kuris įvyksta kiekvieną kartą atliekant bandymą, vadinamas *būtinuoju*.
Visi bandymo elementarieji įvykiai, kurie nėra palankūs įvykiui A, sudaro įvykiui A *priešingą įvykį* $\overline{A}$.
Kai elementarieji įvykiai (bandymo baigtys) vienodai galimi, tai atsitiktinio įvykio A tikimybė:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Palankių įvykiui } A \text{ elementariųjų įvykių skaičius}}{\text{Visų galimų elementariųjų įvykių skaičius}} = \frac{m}{n}.$$

Negalimojo įvykio tikimybė lygi 0:

$$\mathbf{P}(\text{negalimojo įvykio}) = 0.$$

Būtinojo įvykio tikimybė lygi 1:

$$\mathbf{P}(\text{būtinojo įvykio}) = 1.$$

Bet kurio įvykio A tikimybė yra neneigiamas ne didesnis už 1 skaičius:

$$0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1.$$

Vienas kitam priešingų įvykių tikimybių suma lygi 1:

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1.$$

Jei pakartojus bandymą n kartų stebimas atsitiktinis įvykis A įvyko r kartų, tai santykis $\frac{r}{n}$ vadinamas santykiniu įvykio A dažniu. (Rašome $f(A) = \frac{r}{n}$.)
Didėjant bandymų skaičiui, santykinis įvykio dažnis artėja prie to įvykio tikimybės; todėl kai n didelis, tai

$$\mathbf{P}(A) \approx f(A).$$

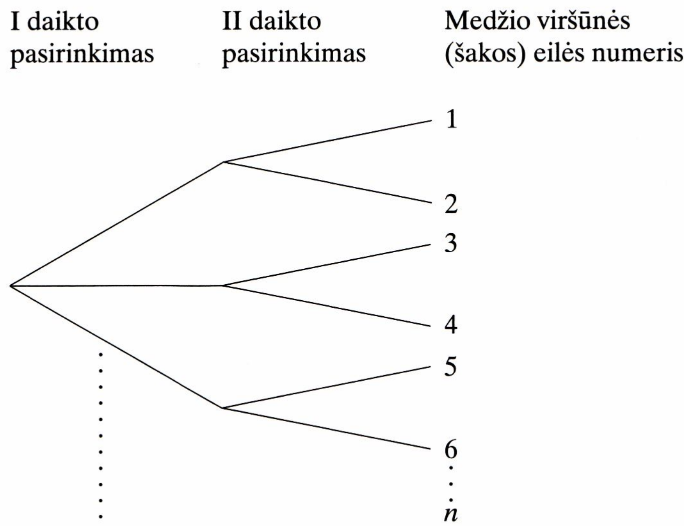
Rinkiniai
Bandymo elementariųjų įvykių skaičių, nagrinėjamam įvykiui palankių elementariųjų įvykių skaičių, rinkinių, sudarytų iš dviejų ar daugiau elementų, skaičių galima rasti juos surašant, braižant galimybių medį ar taikant daugybos taisyklę.

Daugybos taisyklė
Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius lygus galimybių pasirinkti pirmąjį daiktą skaičiaus ir galimybių pasirinkti antrąjį daiktą skaičiaus sandaugai.

I daikto pasirinkimo galimybių skaičius	×	II daikto pasirinkimo galimybių skaičius	=	Galimybių pasirinkti daiktų porą skaičius

Ši taisyklė tinka ir rinkiniams sudarytiems iš daugiau negu dviejų elementų, t. y. rinkinių, sudarytų iš keleto elementų, skaičius lygus tų elementų pasirinkimo galimybių skaičių sandaugai.
Šia taisykle patogu remtis, kai ieškomų rinkinių skaičius yra didelis ir juos visus sunku suskaičiuoti surašant ar braižant galimybių medį.

Galimybių medis — tai daugybos taisyklės schema.



Medžio viršūnių (šakų) skaičius (n) parodo, kiek yra galimybių pasirinkti daiktų porą.

Pratimai ir uždaviniai

176. Humanitarinių klasių moksleiviams buvo pasiūlyta rinktis vieną iš 5 užsienio kalbų: anglų, vokiečių, prancūzų, rusų arba italų. Pasirinkimo duomenys suregistruoti lentelėje:

Anglų	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 //
Vokiečių	𝍸 𝍸
Prancūzų	𝍸 ///
Rusų	𝍸 /
Italų	//

a) Kiek mokinių rinkosi kiekvieną iš kalbų?
b) Kiek mokinių buvo apklausta?
c) Nubraižykite užsienio kalbų pasirinkimo skritulinę diagramą.
d) Kuri dalis moksleivių pasirinko italų kalbą?
e) Kuri dalis moksleivių pasirinko ne italų kalbą?

177. Buvo apklausta 600 žmonių apie mėgstamiausias televizijos laidas. Apklausos duomenimis 20% žmonių labiausiai mėgsta žiūrėti informacines laidas, 30% — vaidybinius filmus, 15% — sportines laidas, 10% — pramogines laidas, 25% — įvairias kitas laidas.

a) Nubraižykite skritulinę diagramą, vaizduojančią apklausos duomenis.

b) Kiek žmonių iš 600 apklaustųjų labiausiai mėgsta žiūrėti informacines ir kiek — sportines laidas?

178. Nubraižykite stulpelinę diagramą, vaizduojančią Lietuvos upių ilgį: Dubysa — 139 km, Merkys — 203 km, Mūša — 164 km, Nemunas — 937 km, Neris — 510 km, Šešupė — 298 km.

179. Vytas surašė visus savo matematikos pažymius, gautus per šiuos metus: 7, 7, 8, 6, 9, 8, 8, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 9, 9, 7, 8, 9, 10.

a) Sudarykite duomenų variacinę eilutę.

b) Sudarykite pažymių dažnių lentelę.

c) Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

d) Apskaičiuokite visų pažymių aritmetinį vidurkį.

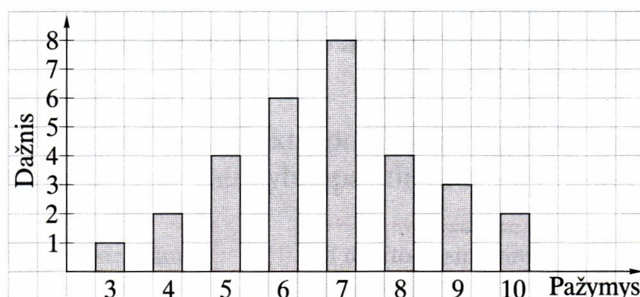
180. Meskite lošimo kauliuką 30 kartų ir žymėkite iškritusių akučių skaičių.

a) Sudarykite dažnių lentelę.

b) Pavaizduokite duomenis stulpeline diagrama.

c) Kiek akučių iškrito dažniausiai; rečiausiai?

181. Diagramoje pavaizduoti moksleivių kontrolinio darbo rezultatai:



a) Kurį pažymį gavo daugiausiai mokinių? Kiek jų buvo?

b) Kurį pažymį gavo mažiausiai mokinių? Kiek jų buvo?

c) Sudarykite pažymių dažnių lentelę.

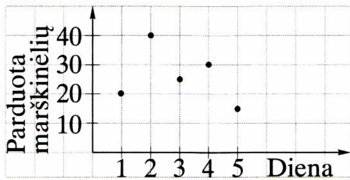
d) Kiek mokinių rašė kontrolinį darbą?

e) Koks pažymių vidurkis?

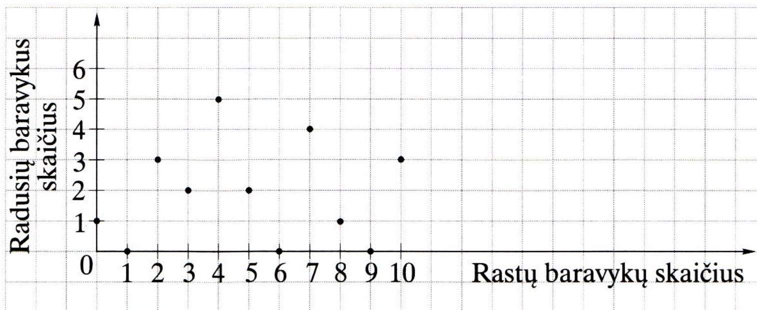
f) Kiek procentų mokinių kontrolinį darbą parašė labai gerai (gavo 9, 10)?

g) Kiek procentų mokinių kontrolinį darbą parašė gerai (gavo 7, 8)?

182. Pardavėjas užsirašė per 5 darbo dienas parduotų sportinių marškinėlių skaičių. Surinkti duomenys pavaizduoti taškine diagrama. Pavaizduokite juos dažnių lentele, daugiakampiu. Kiek marškinėlių iš viso buvo parduota per 5 darbo dienas?



183. Rudenį klasė mokinių surengė iškylą į mišką. Iškylos dalyviai varžėsi, kas ras daugiausia baravykų. Konkurso rezultatai pateikti taškine diagrama:



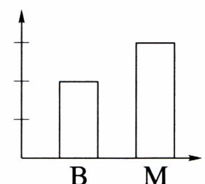
a) Kiek iškyloje buvo dalyvių?
b) Kiek baravykų rado visi iškylautojai?
c) Kiek baravykų (dešimtosios tikslumu) vidutiniškai rado vienas iškylos dalyvis?

184. 45 mokiniai rašė testą, kuriam atlikti buvo skirta daugiausiai 15 min. Lentelėje parodyta, kiek laiko jiems prireikė atsakyti į testo klausimus:

Laikas (min.)	8	9	11	12	13	14	15
Mokinių skaičius	3	5	10	15	7	4	1

a) Koks imties dydis? Koks imties plotis?
b) Pavaizduokite imtį daugiakampiu.

185. Diagrama vaizduoja mergaičių ir berniukų skaičių mokykloje. Nustatykite, kiek mergaičių ir kiek berniukų yra mokykloje, jei iš viso joje mokosi 720 moksleivių.



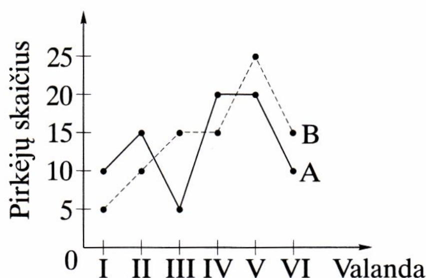
186. 80 berniukų dalyvavo apklausoje apie mėgstamiausias laisvalaikio leidimo formas. Apklausos duomenys pateikti skrituline diagrama.



a) Kiek berniukų dažniausiai laisvalaikio metu žiūri televizorių, kiek sportuoja, kiek žaidžia kompiuteriu, kiek lanko kitus būrelius?

b) Pavaizduokite duomenis dažnių lentele.

187. Daugiakampiai vaizduoja, kiek pirkėjų apsilankė knygynuose A ir B per pirmą (I), antrą (II), trečią (III), ketvirtą (IV), penktą (V) ir šeštą (VI) jų darbo valandą.



a) Kiek pirkėjų apsilankė abiejuose knygynuose per 6 darbo valandas?

b) Kiek vidutiniškai pirkėjų per valandą apsilankė knygyne A ir kiek knygyne B?

c) Kaip kito (didėjo, mažėjo, nesikeitė) pirkėjų srautas knygyne A?

d) Kuriomis valandomis knygyne A buvo daugiau pirkėjų negu knygyne B?

188. Raskite duomenų vidurkį ir medianą:

a) 5, 4, 4, 7, 10; b) 2, 3, 5, 6, 8, 9; c) 4, 3, 7, 2, 9, 6.

189. Parduotuvė per dieną pardavė 30 porų batų, kurių dydžiai yra tokie:

36	39	41	40	37	43	37	38	39	38
37	36	42	35	38	39	36	38	41	37
38	39	40	37	39	36	44	37	35	42

a) Sutvarkykite imtį sugrupuodami duomenis į intervalus [35–37), [37–39), [39–41), [41–43), [43–45).

b) Sudarykite sugrupuotų duomenų dažnių lentelę.

c) Koks imties dydis; plotis?

d) Nubraižykite sugrupuotų duomenų histogramą.

190. Matuojant 40 mergaičių ūgį gauti tokie rezultatai (centimetrais):

150	155	142	160	151	163	150	155	165	156
158	154	166	156	143	157	161	154	149	163
162	159	145	164	151	167	153	158	152	162
157	152	168	153	158	146	164	148	158	159

a) Sudarykite sugrupuotų duomenų dažnių lentelę imdami intervalus nuo 140 cm iki 145 cm, nuo 145 cm iki 150 cm ir t. t. Nubraižykite histogramą.

b) Sugrupuokite duomenis į intervalus nuo 140 cm iki 150 cm, nuo 150 cm iki 160 cm, nuo 160 cm iki 170 cm. Nubraižykite histogramą.

191. Dėžutėje yra 30 raudonų ir 40 geltonų ledinukų. Atsitiktinai paimamas vienas ledinukas. Kokia tikimybė, kad jis yra:
a) raudonas; b) geltonas; c) žalias?

192. Moneta metama du kartus ir stebima, kuo ji atvirto. Surašykite visus elementariuosius įvykius. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — skaičius atvirto du kartus;
B — herbas atvirto tik vieną kartą;
C — herbas atvirto bent vieną kartą.

193. Metami du lošimo kauliukai ir sumuojamos atvirtusios akutės. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — atvirtusių akučių suma lygi 5;
B — atvirtusių akučių suma mažesnė už 5;
C — atvirtusių akučių suma yra lyginis skaičius;
D — atvirtusių akučių suma yra pirminis skaičius.

194. Dėžėje yra 16 kortelių, ant kurių surašyti skaičiai nuo 1 iki 16. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — ištrauktas dalus iš 3 skaičius;
B — ištrauktas skaičius yra 4 kartotinis;
C — ištrauktas ne pirminis skaičius;
D — ištrauktas skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

195. Apskaičiuokite įvykiui A priešingo įvykio tikimybę, jei įvykio A tikimybė lygi: a) 0,76; b) 0,04; c) $\frac{2}{9}$; d) $\frac{6}{17}$.

196. Tikimybė, kad iš dėžės atsitiktinai paimtas gaminys yra nekokybiškas, lygi 0,002. Kokia tikimybė, kad iš dėžės paimtas gaminys yra kokybiškas?

197. Sportinių šokių šokėjos renkasi aprangą — spalvotus marškinėlius ir šortus. Parduotuvėje joms pasiūlė geltonus, žalius, oranžinius ir baltus marškinėlius bei juodus ir mėlynus šortus. Nubraižykite pasirinkimo galimybių medį. Kiek yra iš viso skirtingų galimybių išsirinkti aprangą? Surašykite visas galimybes.

198. Priešpiečiams Gražina renkasi vieną iš 5 bandelių ir vieną iš 4 gėrimų. Kiek skirtingų priešpiečių pasirinkimo galimybių ji turi?

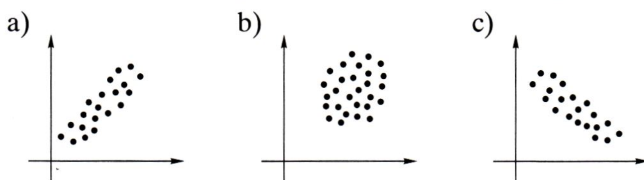
199. Kiek skirtingų raidžių penketų galima sudaryti iš raidžių Š, I, P, U, S? Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sudėjus raides bus sudarytas žodis PUŠIS?

200. Keliais skirtingais būdais 6 žmonės gali sustoti į eilę?

201. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų:
a) 1, 2, 3; b) 1, 2, 3, 4; c) 0, 1, 2, 3?
Uždavinį išspręskite dviem atvejais — kai skaitmenys kartojasi ir kai nesikartoja.

202. Patikrinus 10 000 detalių, rasta 20 nekokybiškų. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkta šios rūšies detalė bus:
a) nekokybiška; b) kokybiška?

203. Pasakykite, ar yra tiesinis ryšys (koreliacija) tarp pavaizduotų požymių. Tuo atveju, kai ji yra, nurodykite, ar ji teigiama, ar neigiama:



204. Pavaizduokite duomenis koordinačių plokštumoje. Nustatykite, ar tarp požymių X ir Y yra koreliacija. Ar ji teigiama, ar neigiama?

a)

X	1	2	2	3	3	3	4	5
Y	5	10	15	10	15	20	25	35

b)

X	1	2	3	3	3	4	4	5	6
Y	5	6	3	4	5	4	3	2	1

205. Iš 10 skirtingų kompaktinių diskų Julius nori išrinkti:
a) du; b) tris; c) penkis diskus.
Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių jis turi?

206. Moksleivių egzamino darbai koduojami. Kodui sudaryti naudojami penki nesikartojantys skaitmenys (iš 10). Ar bus galima skirtingais kodais užkoduoti 15 000 dešimtokų darbų?

207. Iš dėžės, kurioje yra 5 balti ir 3 raudoni rutuliai, atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad:
a) abu rutuliai yra balti; b) abu rutuliai yra raudoni?

KARTOJIMO MEDŽIAGA II DALIS



Pagrindinės sąvokos

Plokštumos figūros

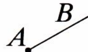
Taškas



Tiesė



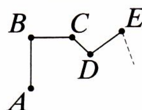
Spindulys



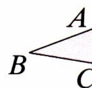
Atkarpa



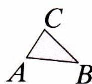
Laužtė



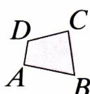
Kampas



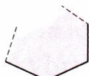
Trikampis



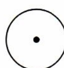
Keturkampis



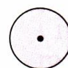
Daugiakampis



Apskritimas



Skritulys



Erdviniai kūnai

Prizmė



Piramidė



Ritinys



Kūgis



Sfera

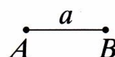


Rutulys



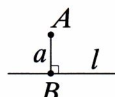
Atstumai

Atstumu tarp dviejų taškų vadinamas tuos taškus jungiančios atkarpos ilgis.



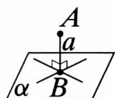
$AB = a$.

Atstumu nuo taško iki tiesės vadinamas statmens iš to taško į tiesę ilgis.



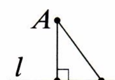
$AB \perp l$,
$AB = a$ — atstumas nuo taško A iki tiesės l.

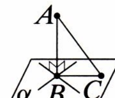
Atstumu nuo taško iki plokštumos vadinamas statmens iš to taško į plokštumą ilgis.



$AB \perp \alpha$,
$AB = a$ — atstumas nuo taško A iki plokštumos α.

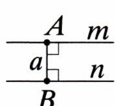
Statmens iš taško į tiesę (plokštumą) ilgis yra mažesnis už pasvirosios iš to taško į tą tiesę (plokštumą) ilgį. Pasviroji yra ilgesnė už jos projekciją.





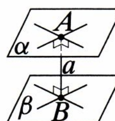
$AB \perp l$, $AB \perp \alpha$,
AB — statmuo,
AC — pasviroji,
BC — pasvirosios projekcija,
$AB < AC$, $BC < AC$.

Atstumu tarp lygiagrečių tiesių vadinamas jų bendro statmens ilgis.



$m \parallel n$,
$AB \perp m$, $AB \perp n$,
$AB = a$ — atstumas tarp tiesių m ir n.

Atstumu tarp lygiagrečių plokštumų vadinamas jų bendro statmens ilgis.



$\alpha \parallel \beta$, $AB \perp \alpha$, $AB \perp \beta$,
$AB = a$ — atstumas tarp plokštumų α ir β.

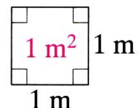
Matavimo vienetai

Atstumai matuojami ilgio vienetais.
Pagrindinis ilgio matavimo vienetas (SI sistemoje) yra metras.
Kiti ilgio matavimo vienetai (mikrometras, milimetras, centimetras, decimetras, kilometras) yra daliniai arba kartotiniai metro atžvilgiu.

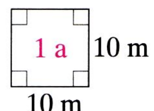
Pirmoji žodžio dalis	mikro-	mili-	centi-	deci-	deka-	hekto-	kilo-	mega-
Reikšmė	milijonoji	tūkstantoji	šimtoji	dešimtoji	dešimt	šimtas	tūkstantis	milijonas
Žymėjimas	μ	m	c	d	da	h	k	M
Daugiklis	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}

1 metras (m) = 10 decimetrų (dm) = 100 centimetrų (cm) =
= 1000 milimetrų (mm) = 1 000 000 mikrometrų (μm);
1 metras (m) = 0,1 dekametro (dam) = 0,01 hektometro (hm) =
= 0,001 kilometro (km) = 0,000001 megametro (Mm).

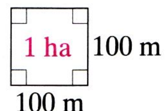
Plotai matuojami ploto vienetais. Pagrindinis ploto matavimo vienetas yra kvadratinis metras (m^2). Vienas kvadratinis metras — tai plotas kvadrato, kurio kraštinė lygi 1 m.



Žemės plotai dažniausiai matuojami arais (a) ir hektarais (ha). Vienas aras — tai plotas kvadrato, kurio kraštinė lygi 10 m.



Vienas hektaras — tai plotas kvadrato, kurio kraštinė lygi 100 m.

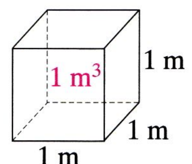


Ploto matavimo vienetų sąryšiai:

1 mm²	×100 =	1 cm²	: 100 =	1 mm²
1 cm²		1 dm²		1 cm²
1 dm²		1 m²		1 dm²
1 m²		1 a		1 m²
1 a		1 ha		1 a
1 ha		1 km²		1 ha

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2$;
$1\ m^2 = 0{,}01\ a = 0{,}0001\ ha = 0{,}000001\ km^2$.

Tūriai matuojami tūrio vienetais. Pagrindinis tūrio matavimo vienetas yra kubinis metras (m^3). Vienas kubinis metras — tai tūris kubo, kurio kraštinė lygi 1 m.



Skysčių užimamas tūris dažnai matuojamas litrais ($1\ \ell = 1\ dm^3$), mililitrais ($1\,m\ell = 1\ cm^3$).

Tūrio matavimo vienetų sąryšiai:

1 mm^3 1 cm^3 1 dm^3	$\times 1000 =$	1 cm^3 1 dm^3 1 m^3	$: 1000 =$	1 mm^3 1 cm^3 1 dm^3
1 m^3	$\times 1\,000\,000\,000 =$	1 km^3	$: 1\,000\,000\,000 =$	1 m^3

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$;
$1\ m^3 = 0{,}000000001\ km^3$.

Matavimo paklaidos

Matavimo prietaiso tikslumas — tai mažiausia to prietaiso padalos vertė. Absoliučioji matavimo paklaida yra mažesnė už prietaiso tikslumą, t. y. matavimo rezultato x ir tikslios dydžio reikšmės a skirtumo modulis yra mažesnis už mažiausią matavimo prietaiso padalos vertę h: $|x - a| < h$. Santykinė matavimo paklaida yra mažesnė už prietaiso tikslumo ir matavimo rezultato santykį: $\frac{|x-a|}{x} < \frac{h}{x}$.

Geometrinių figūrų perimetras ir plotas

Figūra		Perimetras (P)	Plotas (S)
Trikampis	(brėžinys: a, b, c, h)	$a + b + c$	$\frac{1}{2}ah$
Lygiagretainis	(brėžinys: a, b, h)	$2(a + b)$	ah
Stačiakampis	(brėžinys: a, b)	$2(a + b)$	ab
Rombas	(brėžinys: a, h)	$4a$	ah
Kvadratas	(brėžinys: a)	$4a$	a^2
Trapecija	(brėžinys: a, b, c, d, h)	$a + b + c + d$	$\frac{a+b}{2} \cdot h$
Apskritimas (skritulys)	(brėžinys: r)	Ilgis $2\pi r$	πr^2

Erdvinių kūnų paviršiaus plotas ir tūris

Kūnas	Paviršiaus plotas (S_{pav})	Tūris (V)
Prizmė (pasviroji)	$S_{šon} + 2S_{pagr}$	$S_{pagr} \cdot H$
Prizmė (stačioji)	$S_{šon} + 2S_{pagr}$	$S_{pagr} \cdot H$
Stačiakampis gretasienis	$2(ab + ac + bc)$	abc
Kubas	$6a^2$	a^3
Piramidė	$S_{šon} + S_{pagr}$	$\frac{1}{3} S_{pagr} \cdot H$
Ritinys	$S_{šon} + 2S_{pagr} = 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$	$\pi r^2 H$
Kūgis	$S_{šon} + S_{pagr} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 H$
Sfera (rutulys)	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

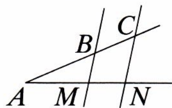
Atkarpų proporcingumas

Atkarpos AB ir CD yra *proporcingos* atkarpoms EF ir GH, jei jų ilgių santykiai yra lygūs, t. y. $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{GH} = k$.

$A \overset{ka}{\longmapsto} B \quad C \overset{kb}{\longmapsto} D$

$E \overset{a}{\longmapsto} F \quad G \overset{b}{\longmapsto} H$

Jei dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai kampo kraštinėse atkirstos atkarpos yra proporcingos. (Talio teorema.)

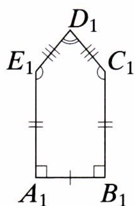


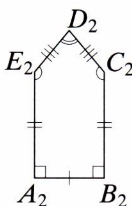
$\angle A$, $BM \parallel CN$,

$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$.

Figūrų lygumas

Dvi figūros vadinamos *lygiomis*, jei uždėjus vieną ant kitos (gal ir apvertus) jos sutampa. Lygių figūrų atitinkamos kraštinės ir atitinkami kampai yra lygūs.

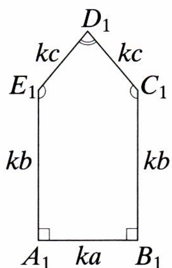


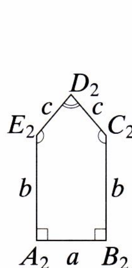


$A_1B_1C_1D_1E_1 = A_2B_2C_2D_2E_2$, tada:
$A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1D_1 = C_2D_2$,
$D_1E_1 = D_2E_2$, $E_1A_1 = E_2A_2$,
$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$,
$\angle D_1 = \angle D_2$, $\angle E_1 = \angle E_2$.

Figūrų panašumas

Dvi figūros vadinamos *panašiomis*, jei viena gauta iš kitos ją padidinus (sumažinus). Panašiųjų figūrų atitinkamos kraštinės yra proporcingos, o atitinkami kampai yra lygūs.

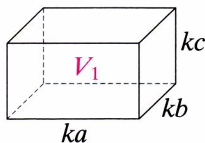


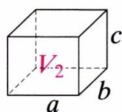


$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim A_2B_2C_2D_2E_2$, tada:
$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = \frac{D_1E_1}{D_2E_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2} = k$,
$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$,
$\angle D_1 = \angle D_2$, $\angle E_1 = \angle E_2$;
santykis k vadinamas *panašumo koeficientu*.

Panašiųjų figūrų perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui, o plotų santykis — panašumo koeficiento kvadratui:
$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{P_{A_2B_2C_2D_2E_2}} = k$, $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{A_2B_2C_2D_2E_2}} = k^2$.

Panašiųjų erdvinių kūnų tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui:





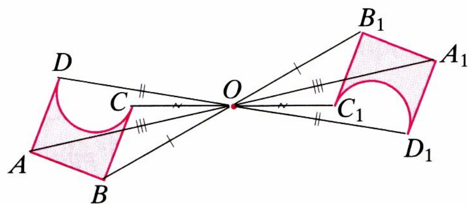
$\frac{V_1}{V_2} = k^3$.

Figūrų simetriškumas

Simetrija taško atžvilgiu
(*centrinė simetrija*)

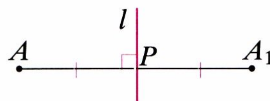


Taškai A ir A_1 yra simetriški *taško* O atžvilgiu, t. y. taškas O yra atkarpos AA_1 vidurys ($AO = OA_1$).
Taškas O — simetrijos centras.

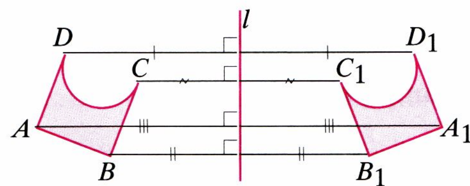


Figūros $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ yra simetriškos taško O atžvilgiu.

Simetrija tiesės atžvilgiu
(*ašinė simetrija*)



Taškai A ir A_1 yra simetriški *tiesės* l atžvilgiu, t. y. $AA_1 \perp l$ ir $AP = PA_1$.
Tiesė l — simetrijos ašis.



Figūros $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ yra simetriškos tiesės l atžvilgiu.

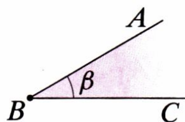
Dvi figūros, simetriškos taško ar tiesės atžvilgiu, yra lygios.

Figūra, kuri centrine arba ašine simetrija atvaizduojama pati į save, vadinama *simetriška* figūra.

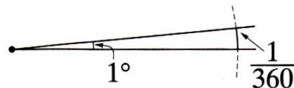
Figūra	Simetrijos centras	Simetrijos ašys	Simetrijos ašių skaičius
Atkarpa			Dvi
Kampas	Neturi		Viena
Stačiakampis			Dvi
Rombas			Dvi
Kvadratas			Keturios
Apskritimas			Be galo daug

1 Kampai

Kampu vadinama plokštumos dalis, kurią riboja du spinduliai, išeinantys iš vieno taško.



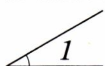
$\angle ABC = \angle B = \beta$,
B — kampo viršūnė,
BA ir BC — kampo kraštinės.



Kampų didumas dažniausiai matuojamas laipsniais. Vieno laipsnio didumo kampas atitinka $\frac{1}{360}$ dalį pilnutinio kampo.

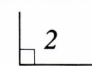
Kampų rūšys

Smailusis



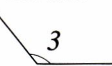
$0° < \angle 1 < 90°$

Statusis



$\angle 2 = 90°$

Bukasis



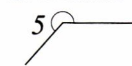
$90° < \angle 3 < 180°$

Ištiestinis



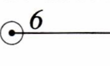
$\angle 4 = 180°$

Išvirkštinis



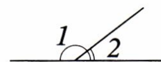
$180° < \angle 5 < 360°$

Pilnutinis



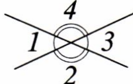
$\angle 6 = 360°$

Gretutiniai



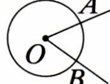
$\angle 1$ ir $\angle 2$ — gretutiniai;
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

Kryžminiai

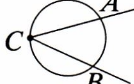


$\angle 1$ ir $\angle 3$ — kryžminiai,
$\angle 2$ ir $\angle 4$ — kryžminiai;
$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$

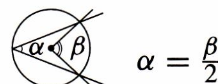
Centrinis



Įbrėžtinis

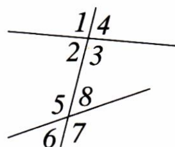


Įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo.



$\alpha = \frac{\beta}{2}$

Kampai, gauti dvi tieses perkirtus trečiąja:



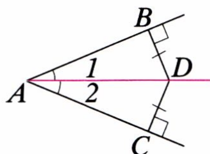
$\angle 1$ ir $\angle 5$; $\angle 2$ ir $\angle 6$; $\angle 3$ ir $\angle 7$; $\angle 4$ ir $\angle 8$ — atitinkamieji,
$\angle 2$ ir $\angle 8$; $\angle 3$ ir $\angle 5$ — vidaus priešiniai,
$\angle 1$ ir $\angle 7$; $\angle 4$ ir $\angle 6$ — išorės priešiniai,
$\angle 2$ ir $\angle 5$; $\angle 3$ ir $\angle 8$ — vidaus vienašaliai,
$\angle 1$ ir $\angle 6$; $\angle 4$ ir $\angle 7$ — išorės vienašaliai.

Dvi plokštumos tiesės yra lygiagrečios, jeigu kampai, gauti tas tieses perkirtus trečiąja, pasižymi bent viena iš šių savybių:

- atitinkamieji kampai yra lygūs,
- vidaus (išorės) priešiniai kampai yra lygūs,
- vidaus (išorės) vienašalių kampų sumos lygios 180°.

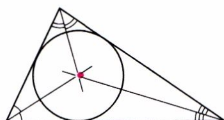
Pusiaukampinė

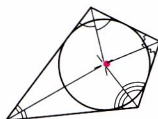
Kampo *pusiaukampine* vadinamas spindulys, kuris išeina iš kampo viršūnės ir dalija tą kampą pusiau.



AD — kampo BAC pusiaukampinė ($\angle 1 = \angle 2$).
Pusiaukampinės taškai yra vienodai nutolę nuo kampo kraštinių ($DB = DC$).
Tiesė, einanti per pusiaukampinę, yra to kampo simetrijos ašis.

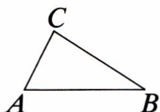
Jeigu n-kampio kampų pusiaukampinės susikerta viename taške, tai į n-kampį galima įbrėžti apskritimą, o tas taškas yra įbrėžtinio apskritimo centras.





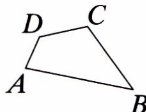
Daugiakampio vidaus kampų suma

Trikampis



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

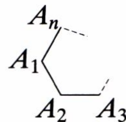
Keturkampis



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$
$= 360°$

......

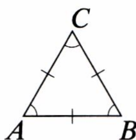
n-kampis



$\angle A_1 + \angle A_2 + \cdots + \angle A_n =$
$= (n-2) \cdot 180°$

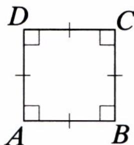
Taisyklingojo daugiakampio kampo didumas

Lygiakraštis trikampis



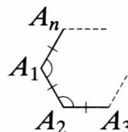
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Kvadratas



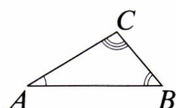
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Taisyklingasis n-kampis



$\angle A_1 = \angle A_2 = \cdots = \angle A_n =$
$= \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$

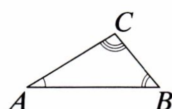
Trikampio kampai
Trikampio kampų suma lygi 180°.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

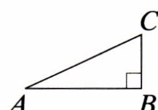
Kiekvieno trikampio bent du kampai yra smailieji.
Smailiojo trikampio visi kampai yra smailūs, stačiojo trikampio vienas kampas yra status, o bukojo trikampio vienas kampas yra bukas.

Smailusis



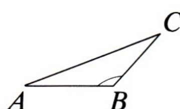
$\angle A,\ \angle B,\ \angle C < 90°$

Statusis



$\angle B = 90°$

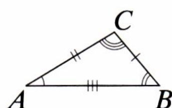
Bukasis



$\angle B > 90°$

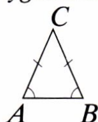
Įvairiakraščio trikampio visi kampai yra skirtingi, lygiašonio trikampio du kampai (prie pagrindo) yra lygūs, lygiakraščio trikampio visi trys kampai yra lygūs (= 60°).

Įvairiakraštis



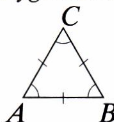
$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

Lygiašonis



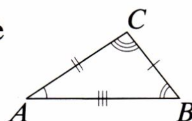
$\angle A = \angle B$

Lygiakraštis



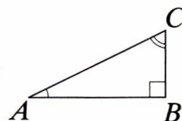
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Prieš didesnį trikampio kampą yra ilgesnė trikampio kraštinė.



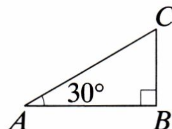
$\angle A < \angle B < \angle C$,
$BC < AC < AB$.

Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi 90°.



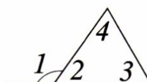
$\angle B = 90°$,
$\angle A + \angle C = 90°$.

Jeigu stačiojo trikampio vienas kampas lygus 30°, tai statinis, esantis prieš tą kampą, lygus pusei įžambinės.



$\angle B = 90°$,
$\angle A = 30°$,
$BC = \frac{AC}{2}$.

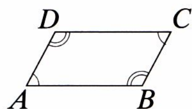
Trikampio priekampis lygus jam negretutinių kampų sumai.



$\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$.

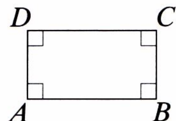
Keturkampio kampai

Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs; gretimų kampų (kampų, esančių prie vienos kraštinės) suma lygi 180°.



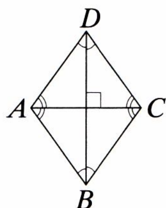
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$,
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$.

Stačiakampio visi kampai yra statūs.



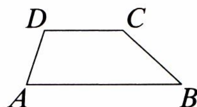
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

Rombo įstrižainės yra statmenos ir jo kampus dalija pusiau.



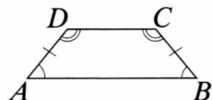
$AC \perp BD$,
$\angle ADB = \angle BDC$, $\angle ACD = \angle ACB$,
$\angle CBD = \angle DBA$, $\angle BAC = \angle CAD$.

Trapecijos kampų, esančių prie tos pačios šoninės kraštinės, suma lygi 180°.



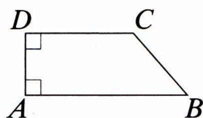
$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Lygiašonės trapecijos kampai, esantys prie to paties pagrindo, yra lygūs.



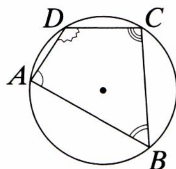
$\angle A = \angle B$, $\angle D = \angle C$.

Stačiosios trapecijos du kampai yra statūs.



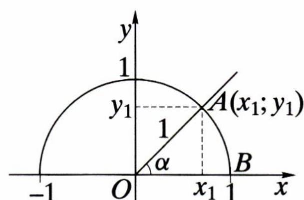
$\angle A = \angle D = 90^\circ$.

Jeigu keturkampio priešingųjų kampų sumos yra lygios (= 180°), tai apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą.

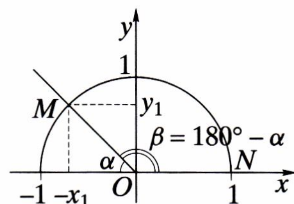


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$ (= 180°).

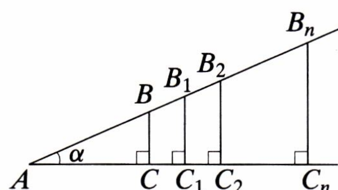
Kampų nuo 0° iki 180° sinusas, kosinusas ir tangentas



$\angle AOB = \alpha$, $OA = 1$
$\sin\alpha = y_1$, $\cos\alpha = x_1$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{x_1}$,
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



$\angle MON = \beta = 180^\circ - \alpha$,
$\sin\beta = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$,
$\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.



$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \ldots = \frac{B_nC_n}{AB_n} = \sin\alpha$,
$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \ldots = \frac{AC_n}{AB_n} = \cos\alpha$,
$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \ldots = \frac{B_nC_n}{AC_n} = \operatorname{tg}\alpha$.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pratimai ir uždaviniai

208. Spindulys OB dalija kampą AOC į du kampus. Apskaičiuokite kampo AOB didumą, jei $\angle BOC = 25^\circ$ ir:
a) $\angle AOC = 140^\circ$; b) $\angle AOC$ yra ištiestinis; c) $\angle AOC$ yra statusis.

209. Kampo MON viduje nubrėžtas spindulys OA taip, kad kampas MOA sudaro $\frac{2}{15}$ kampo MON. Apskaičiuokite kampo AON didumą, jei kampas MON yra: a) statusis; b) ištiestinis.

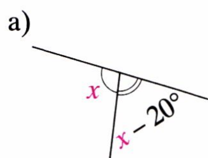
210. Kampo ABC viduje nubrėžtas spindulys BD taip, kad kampas ABD sudaro 25% kampo ABC. Apskaičiuokite kampo DBC didumą, jei kampas ABC yra: a) statusis; b) ištiestinis.

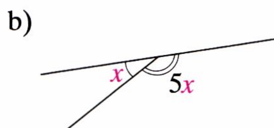
211. Kiek procentų pilnutinio kampo sudaro kampas, kurio didumas yra:
a) $72°$; b) $108°$; c) $180°$; d) $324°$?

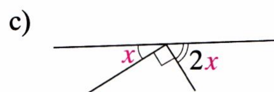
212. Apskaičiuokite gretutinių kampų didumus, jei jie sutinka kaip $7:3$.

213. Vienas gretutinių kampų sudaro 20% kito gretutinio kampo. Apskaičiuokite tų kampų didumus.

214. Raskite x:

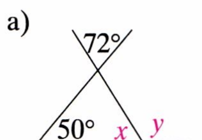
a) 

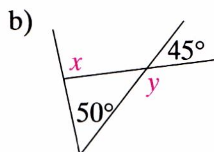
b) 

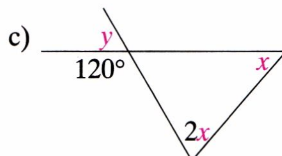
c) 

215. Dvi susikertančios tiesės sudaro 4 kampus. Vieno jų didumas lygus 45% ištiestinio kampo didumo. Apskaičiuokite likusių trijų kampų didumus.

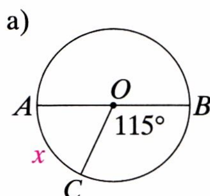
216. Raskite x ir y:

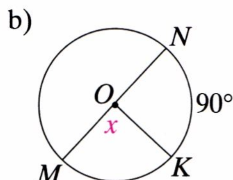
a) 

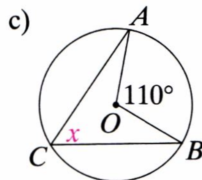
b) 

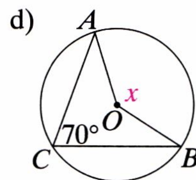
c) 

217. Raskite x:

a) 

b) 

c) 

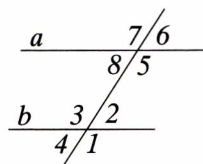
d) 

218. Tiesė kerta dvi lygiagrečias tieses. Apskaičiuokite gautus 8 kampus, jeigu:
a) vidaus vienašalių kampų didumų santykis lygus $\frac{4}{5}$;
b) vidaus vienašalių kampų didumų skirtumas lygus $30°$.

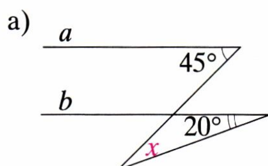
219. Duotas $60°$ kampas. Jo viduje pažymėtas taškas ir per jį nubrėžtos dvi tiesės: viena tiesė statmena kampo kraštinei, o kita tiesė lygiagreti antrajai kampo kraštinei. Apskaičiuokite kampą tarp šių tiesių.

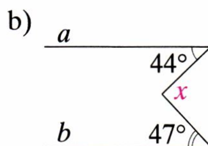
220. a) Ar tiesės a ir b yra lygiagrečios, jei:
1) $\angle 4 = 30°$, $\angle 7 = 5 \cdot \angle 2$;
2) $\angle 7 = 158°$, $\angle 1 = \angle 6 + 134°$?

b) Duota: $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 312°$, $\angle 2 + \angle 4 = 96°$.
Įrodyti: $a \parallel b$.



221. Tiesės a ir b yra lygiagrečios. Raskite kampo x didumą:

a) 

b) 

222. Spindulys OM — bukojo kampo AOB pusiaukampinė. Spindulys ON — kampo MOB pusiaukampinė. Apskaičiuokite kampo AON didumą, jei $\angle AOM = 78°$.

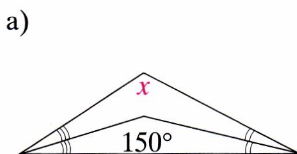
223. a) Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus 75°. Apskaičiuokite šio trikampio kampą, esantį prieš pagrindą.

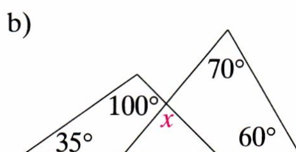
b) Lygiašonio trikampio kampas, esantis prieš pagrindą, lygus 110°. Apskaičiuokite šio trikampio kampą prie pagrindo.

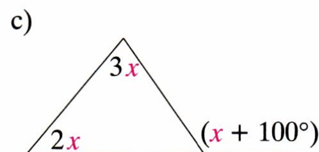
c) Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo keturis kartus mažesnis už kampą, esantį prieš pagrindą. Apskaičiuokite šio trikampio kampus.

224. Apskaičiuokite stačiojo trikampio kampus, jei vienas smailusis kampas 5 kartus didesnis už kitą smailųjį kampą.

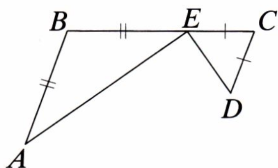
225. Apskaičiuokite x:

a) 

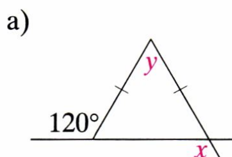
b) 

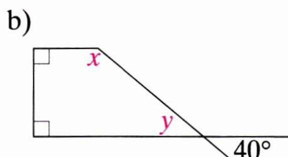
c) 

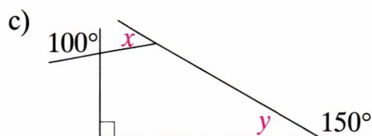
226. $AB \parallel CD$, $AB = BE$, $EC = CD$, taškai B, E ir C yra vienoje tiesėje. Apskaičiuokite kampo AED didumą.



227. Raskite x ir y:

a) 

b) 

c) 

228. Apskaičiuokite lygiagretainio kampus, jeigu:

a) vienas iš jų 1,5 karto didesnis už kitą kampą;

b) vienas iš jų sudaro 87,5% kito kampo;

c) dviejų kampų didumai sutinka kaip $\frac{5}{12} : 1\frac{1}{4}$.

229. Stačiakampio įstrižainės kertasi 50° kampu. Kokie didumai kampų, kuriuos sudaro stačiakampio įstrižainė su gretimomis kraštinėmis?

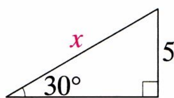
230. Rombo kraštinė su įstrižainėmis sudaro kampus, kurių didumų santykis lygus 3,5 : 5,5. Raskite rombo kampus.

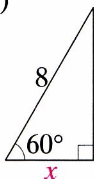
231. a) Lygiašonės trapecijos vienas kampas lygus 20°. Apskaičiuokite kitus trapecijos kampus.

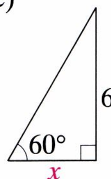
b) Lygiašonės trapecijos kampų, esančių prie šoninės kraštinės, didumai sutinka kaip 4 : 5. Apskaičiuokite trapecijos kampus.

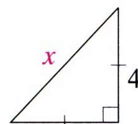
c) Stačiosios trapecijos vieno kampo didumas lygus 30% pilnutinio kampo didumo. Apskaičiuokite trapecijos kampus.

232. Raskite x:

a) 

b) 

c) 

d) 

233. Viršutinis kopėčių galas atremtas į sieną 8 m aukštyje nuo žemės. Kopėčios su žemės paviršiumi sudaro 59° kampą. Apskaičiuokite kopėčių galo, esančio ant žemės, nuotolį nuo sienos (0,01 m tikslumu).

234. Nuo kalno papėdės iki jo viršūnės nutiestas 1,5 km ilgio takas. Raskite kalno aukštį (0,1 m tikslumu), jei takas su horizontu sudaro 5° kampą.

235. a) Raskite $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

b) Raskite $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, jei $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

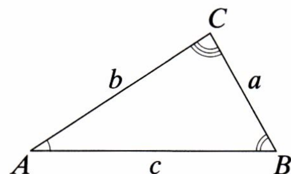
236. Apskaičiuokite:

a) $\sin 150^\circ + \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ + \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ - \cos 120^\circ$;

b) $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ - \operatorname{tg}^2 135^\circ$.

2 Trikampiai

Trikampiu vadinama plokštumos dalis, apribota trimis atkarpomis, kurių galai poromis sutampa.



$\triangle ABC$,
A, B, C — viršūnės, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — kampai,
$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ — kraštinės;
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$;
$a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$;
$\angle A < \angle B < \angle C \Longleftrightarrow a < b < c$.

Trikampio perimetras: $P_{\triangle ABC} = a + b + c$.

Trikampio plotas: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \angle C = \frac{1}{2}ac \sin \angle B = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$.

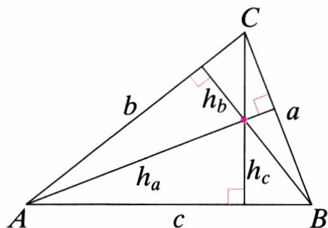
Sinusų teorema

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}.$$

Kosinusų teorema

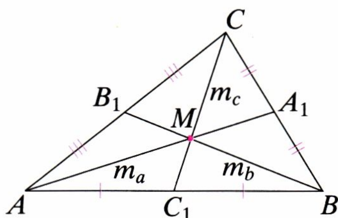
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C.$$

Statmuo nuo trikampio viršūnės iki tiesės, kurioje yra prieš tą viršūnę esanti trikampio kraštinė, vadinamas trikampio *aukštine*.
Trikampio aukštinės (arba jų tęsiniai) susikerta viename taške.



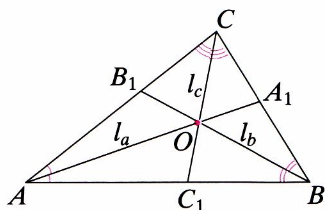
h_a — aukštinė, nubrėžta į kraštinę a,
h_b — aukštinė, nubrėžta į kraštinę b,
h_c — aukštinė, nubrėžta į kraštinę c.
Trikampio plotas:
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės viduriu, vadinama trikampio *pusiaukraštine*.
Trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške.



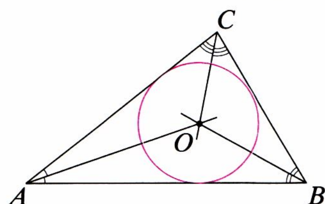
m_a — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės A,
m_b — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės B,
m_c — pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės C;
$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$ — trikampio pusiaukraštinių savybė.

Trikampio kampo pusiaukampinės atkarpa nuo trikampio viršūnės iki prieš ją esančios kraštinės vadinama trikampio *pusiaukampine*.
Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.

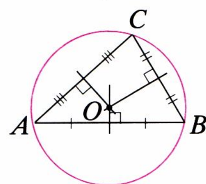


l_a — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės A,
l_b — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės B,
l_c — pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės C;
O — įbrėžtinio apskritimo centras (taškas, vienodai nutolęs nuo visų trikampio kraštinių).
$\frac{AC}{CA_1} = \frac{AB}{BA_1}$, $\frac{BA}{AB_1} = \frac{BC}{CB_1}$, $\frac{CA}{AC_1} = \frac{CB}{BC_1}$ — trikampio pusiaukampinių savybė.

Į bet kokį trikampį galima įbrėžti apskritimą.

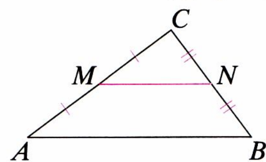


Tiesė, statmena trikampio kraštinei ir einanti per jos vidurio tašką, vadinama trikampio kraštinės *vidurio statmeniu*.
Trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta viename taške.



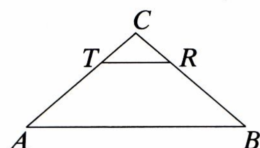
O — apibrėžtinio apskritimo centras (taškas, vienodai nutolęs nuo visų trikampio viršūnių).
Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.

Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama trikampio *vidurine linija*. Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trečiajai trikampio kraštinei ir lygi jos pusei.



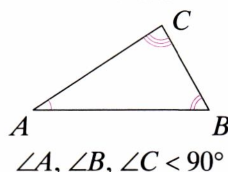
MN — vidurinė linija,
$MN \parallel AB$, $MN = \frac{AB}{2}$.

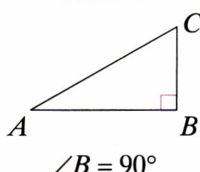
Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta nuo jo trikampį, kurio kraštinės proporcingos duotojo trikampio kraštinėms. (Talio teoremos išvada.)

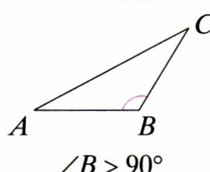


$TR \parallel AB$,
$\frac{CT}{CA} = \frac{CR}{CB} = \frac{TR}{AB}$.

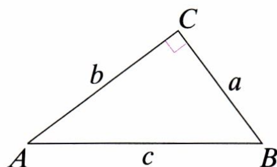
Trikampių rūšys pagal kampus







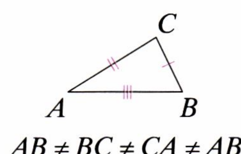
Statusis trikampis
Trikampis, kurio vienas kampas status, vadinamas stačiuoju.

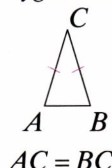


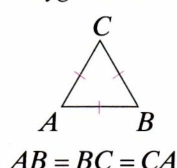
$\triangle ABC$ — status ($\angle C = 90°$),
a, b — statiniai, c — įžambinė;
$a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagoro teorema);
$\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$,
$\frac{a}{c} = \cos B$, $\frac{b}{c} = \sin B$, $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$;
$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$. Jei $\angle A = 30°$, tai $a = \frac{c}{2}$.

Jeigu trikampio vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai tas trikampis yra statusis. (Atvirkštinė Pitagoro teorema.)

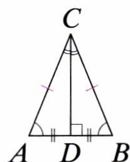
Trikampių rūšys pagal kraštines







Lygiašonis trikampis
Trikampis, kurio dvi kraštinės lygios, vadinamas lygiašoniu.

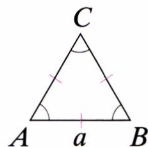


$\triangle ABC$ — lygiašonis ($AC = BC$),
AC, BC — šoninės kraštinės,
AB — pagrindas.

1. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs: $\angle A = \angle B$.
2. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, ir pusiaukampinė: $CD \perp AB$, $AD = DB$, $\angle ACD = \angle BCD$.
3. Tiesė, einanti per lygiašonio trikampio aukštinę, nubrėžtą į pagrindą, yra to trikampio simetrijos ašis (brėžinyje CD — simetrijos ašis).

Lygiakraštis trikampis

Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas lygiakraščiu.

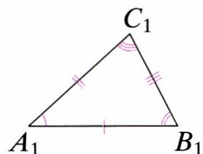


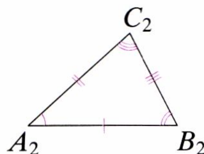
$\triangle ABC$ — lygiakraštis ($AB = BC = CA = a$),
$P_{\triangle ABC} = 3a$,
$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

1. Lygiakraščio trikampio visi kampai lygūs: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.
2. Lygiakraščio trikampio aukštinė, pusiaukraštinė ir pusiaukampinė, nubrėžtos iš vienos viršūnės, sutampa ir yra lygios:
   $h_a = m_a = l_a = h_b = m_b = l_b = h_c = m_c = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
3. Lygiakraštis trikampis turi tris simetrijos ašis. Jos eina per trikampio aukštines.
4. Įbrėžtinio apskritimo spindulys $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;
   apibrėžtinio apskritimo spindulys $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trikampių lygumas

Du trikampiai vadinami *lygiais*, jei juos galima sutapdinti uždėjus vieną ant kito (gal ir apvertus). Lygių trikampių atitinkamos kraštinės ir atitinkami kampai yra lygūs.





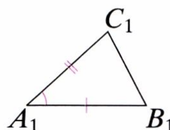
$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$,
$A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$,
$C_1A_1 = C_2A_2$, $\angle A_1 = \angle A_2$,
$\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$.

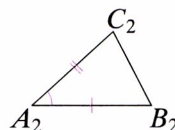
Trikampių lygumo požymiai

I. Trikampių lygumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

Jei $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$ ir $\angle A_1 = \angle A_2$,

tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

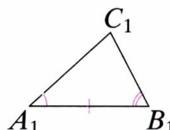


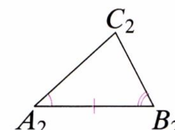


II. Trikampių lygumas pagal kraštinę ir du kampus prie jos.

Jei $A_1B_1 = A_2B_2$
ir $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$,

tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

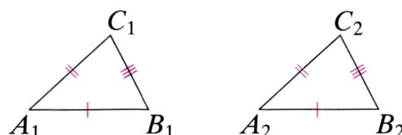




III. Trikampių lygumas pagal tris kraštines.

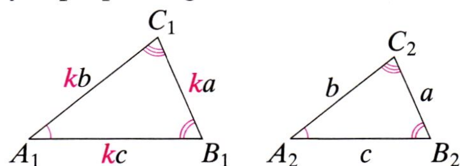
Jei $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1A_1 = C_2A_2$,

tai $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.



Trikampių panašumas

Trikampiai vadinami *panašiais*, jei vienas gautas iš kito jį sumažinus arba padidinus. Panašių trikampių atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės yra proporcingos.



$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$,

$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$;

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$,

k — panašumo koeficientas.

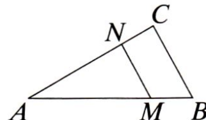
$\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle A_2B_2C_2}} = k$ — panašių trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.

$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = k^2$ — panašių trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

Tiesė, lygiagreti vienai trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta trikampį, panašų į duotąjį.

Jei $MN \parallel BC$,

tai $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

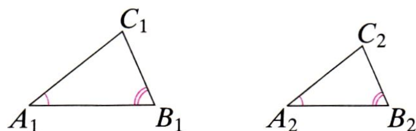


Trikampių panašumo požymiai

I. Trikampių panašumas pagal du kampus.

Jei $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$,

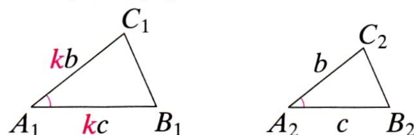
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



II. Trikampių panašumas pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$ ir $\angle A_1 = \angle A_2$,

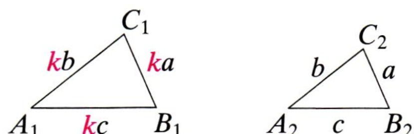
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



III. Trikampių panašumas pagal tris kraštines.

Jei $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = k$,

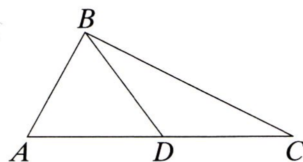
tai $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



Pratimai ir uždaviniai

237. Apskaičiuokite lygiašonio trikampio kampus, jei:
a) kampas tarp trikampio nelygiųjų aukštinių lygus $70°$;
b) kampas tarp trikampio lygiųjų aukštinių lygus $50°$.

238. a) Duota: $AB = AD$, $BD = DC$, $\angle DBC = 30°$. Apskaičiuokite $\triangle ABC$ kampus.
b) Duota: $AD = BD$, $\angle BAD = 3\angle DBC$, $\angle BDA = 42°$. Apskaičiuokite $\triangle ABC$ kampus.



239. Kokios rūšies yra trikampis, jeigu:
a) vienas jo kampas didesnis už kitų dviejų kampų sumą;
b) vienas jo kampas lygus kitų dviejų kampų sumai;
c) vienas jo kampas lygus kitų dviejų kampų skirtumui?

240. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurio:
a) dvi kraštinės yra 12 cm ir 15 cm ilgio, o kampas tarp jų lygus $60°$;
b) dvi kraštinės yra 10 cm ir 12 cm ilgio, o kampas tarp jų lygus $150°$;
c) dvi kraštinės yra 2 cm ir 5 cm ilgio, o kampas tarp jų lygus $85°$.

241. Lygiašonio trikampio ABC ($AB = BC$) aukštinė BD lygi 40 cm, o pusiaukraštinė $AE = 25$ cm. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

242. Raskite kampą tarp stačiojo trikampio smailiųjų kampų pusiaukampinių.

243. Ar galima nubraižyti tokį trikampį ABC, kad to trikampio kampo B pusiaukampinė BD atkirstų lygiakraštį trikampį, t. y. arba $\triangle ABD$, arba $\triangle BCD$ būtų lygiakraštis?

244. Lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo pusiaukampinė dalija šoninę kraštinę į dvi 10 cm ir 8 cm ilgio atkarpas. Raskite pagrindo ilgį.

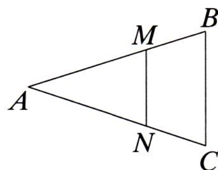
245. Išvesta trikampio ABC kampo B pusiaukampinė. Į kokias dalis ji dalija kraštinę AC, jei $AC = 56$ cm, $AB = 45$ cm ir $BC = 60$ cm?

246. Trikampio ABC kampo B pusiaukampinė kraštinę AC dalija į dvi 28 cm ir 12 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio perimetrą, jei $AB - BC = 18$ cm.

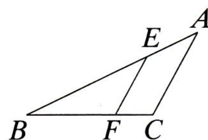
247. DE — trikampio ABC vidurinė linija, lygiagreti kraštinei AC. Apskaičiuokite:
a) P_{ABC}, jei $AB + BC = 12$ cm, $DE = 3$ cm;
b) DE, jei $P_{ABC} = 120$ cm, $AD = 23$ cm, $BE = 15$ cm.

248. Apskaičiuokite trikampio dalių, į kurias trikampį dalija jo vidurinė linija, plotų santykį.

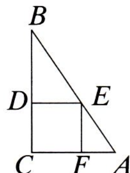
249. Dvi susikertančias gatves AB ir AC kerta dvi lygiagrečios gatvės MN ir BC. Apskaičiuokite atstumą MN, jei $AM = 1{,}6$ km, $MB = 0{,}8$ km, $BC = 1{,}5$ km.



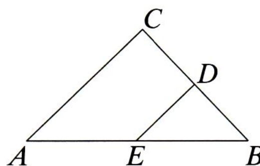
250. Duota: $EF \parallel AC$, $EF = 5$ cm, $AE = 4$ cm, $EB = 10$ cm.
Apskaičiuokite AC.



251. Trikampis ABC yra status ($\angle C = 90°$), o keturkampis $CDEF$ — kvadratas. Apskaičiuokite kvadrato kraštinės ilgį, jeigu trikampio statinių ilgiai yra 4 cm ir 6 cm.



252. Duota: $AB = 29$, $BC = 20$, $AC = 21$, $BE = 14{,}5$, $BD = 10$.
a) Įrodykite, kad $DE \parallel AC$.
b) Ar tiesės ED ir BC yra statmenos? (Atsakymą pagrįskite.)



253. Apskaičiuokite stačiojo trikampio įžambinės ilgį, jei jo vieno statinio ilgis lygus 8 cm, o plotas — 60 cm^2.

254. Vienas stačiojo trikampio kampas lygus 60°. Apskaičiuokite trikampio įžambinės ilgį, jeigu įžambinės ir mažesniojo statinio ilgių suma lygi 27 cm.

255. Trikampio kampų didumų santykis yra 1 : 2 : 3. Apskaičiuokite trikampio plotą, jeigu jo ilgiausioji kraštinė lygi 12 dm.

256. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis lygus 48 cm, o vienas smailusis kampas yra 30°. Apskaičiuokite statinių projekcijų ilgius įžambinėje.

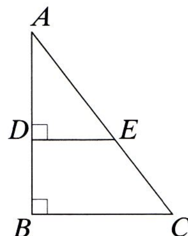
257. Trikampio ABC viršūnių koordinatės yra $A(-1; 6)$, $B(-2; 3)$, $C(7; 0)$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis. Raskite kampo C sinusą ir apskaičiuokite kampo C didumą 1° tikslumu.

258. Trikampio ABC viršūnių koordinatės yra $A(2; 3)$, $B(5; 2)$ ir $C(4; 1)$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis. Raskite kampo A tangentą ir apskaičiuokite kampo A didumą 1° tikslumu.

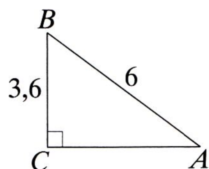
259. Kai saulės spinduliai su žeme sudaro 32° kampą, tai gamyklos kamino šešėlio ilgis yra 25 m. Apskaičiuokite kamino aukštį.

260. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) kampas B lygus $30°$. Kampo A pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D. Apskaičiuokite atkarpų AB, BD, AD ir DC ilgius, jeigu $AC = a$.

261. Duota: $DE = 3{,}6$, $AD = 4{,}8$, $AB = 8$.
Apskaičiuokite:
a) AE;
b) AC;
c) $\angle DEA$ ($1°$ tikslumu);
d) ilgį aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės B.

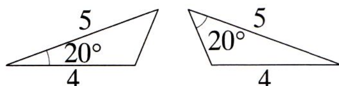


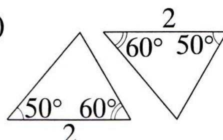
262. Apskaičiuokite:
a) kampą A ($1°$ tikslumu);
b) AC;
c) S_{ABC};
d) ilgį aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės C.

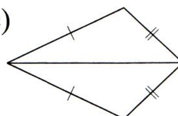


263. Netoli upės kranto pastatytas 33 m aukščio bokštas. Apskaičiuokite upės plotį (0,1 m tikslumu), jei iš bokšto artimesnysis upės krantas matomas $65°$ kampu, o tolimesnysis — $29°$ kampu.

264. Ar pavaizduoti trikampiai yra lygūs? Kodėl?

a)


b)


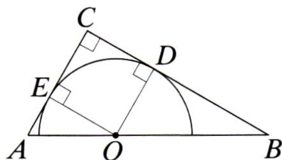
c)


265. Ar panašūs:
a) du statieji trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, jeigu trikampio ABC vienas kampas lygus $42°$, o trikampio $A_1B_1C_1$ vienas kampas lygus $48°$;
b) du lygiašoniai trikampiai, jei vieno trikampio kampas, esantis prieš pagrindą, lygus $72°$, o kito trikampio kampas prie pagrindo lygus $54°$;
c) du lygiašoniai trikampiai, jei vieno trikampio kampas, esantis prieš pagrindą, lygus $54°$, o kito trikampio kampas prie pagrindo lygus $72°$?

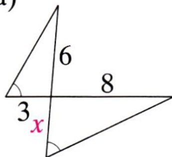
266. Duoti trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Apskaičiuokite kraštinės A_1B_1 ilgį, jei $BC = 17{,}5$ cm, $B_1C_1 = 7$ cm, $AB = 12{,}5$ cm.

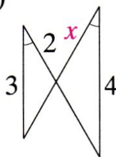
267. Trikampio ABC kraštinės $AC = 12$ cm, $BC = 16$ cm. Per trikampio viršūnę A nubrėžta tiesė, kertanti kraštinę BC taške D. Apskaičiuokite atkarpos DC ilgį, jei $\angle ADC = \angle BAC$.

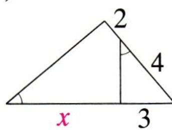
268. Į statųjį trikampį ABC įbrėžtas pusapskritimis, kurio centras O įžambinę dalija santykiu 3 : 4. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, jei pusapskritimio spindulys lygus 12 cm.

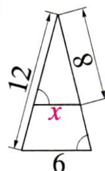


269. Apskaičiuokite x:

a)


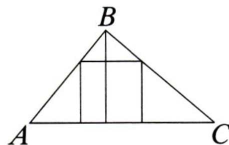
b)


c)


d)


270. Ar panašūs trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, jei $AB = 16$ cm, $AC = 24$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm, $A_1C_1 = 18$ cm, $\angle A = \angle A_1$? Apskaičiuokite kraštinės BC ilgį, jei $B_1C_1 = 15$ cm.

271. Trikampio ABC kraštinė AC yra 12 dm ilgio, o aukštinė, nubrėžta iš viršūnės B, yra 6 dm ilgio. Į šį trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi viršūnės yra kraštinėje AC, o kitos dvi — kraštinėse AB ir BC. Apskaičiuokite kvadrato kraštinės ilgį.



272. Lygiašonį trikampį ABC ($AB = BC$) tiesė, lygiagreti kraštinei AC, dalija į dvi dalis, kurių plotai lygūs 192 cm^2 ir 240 cm^2, imant nuo viršūnės B. Tiesės atkarpa tarp kraštinių AB ir BC lygi 24 cm. Apskaičiuokite trikampio kraštinės AB ilgį.

273. Raskite trikampio ABC kraštinės BC ilgį ir kampų B, C didumus, jei:

a) $AB = 30$ cm, $AC = 50$ cm, $\angle A = 120°$;
b) $AB = 25$ cm, $AC = 40$ cm, $\angle A = 60°$;
c) $AB = 21$ cm, $AC = 9\sqrt{2}$ cm, $\angle A = 45°$.

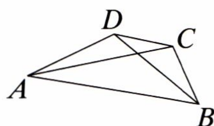
274. Duotas $\triangle ABC$. Raskite nežinomas trikampio kraštines ir kampus, jei:

a) $a = 20$, $\angle B = 75°$, $\angle C = 60°$; b) $b = 12$, $\angle A = 36°$, $\angle B = 25°$;
c) $a = 12$, $b = 5$, $\angle A = 120°$; d) $a = 2$, $b = 4$, $\angle A = 60°$.

275. Trikampio kraštinės yra $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm. Apskaičiuokite trikampio kampus.

3 Keturkampiai

Keturkampiu vadinama plokštumos dalis, kurią riboja savęs nekertanti uždara laužtė, sudaryta iš 4 grandžių.



$ABCD$ — keturkampis, A, B, C, D — viršūnės, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ — kampai, AB, BC, CD, DA — kraštinės, AB ir CD; AD ir BC — priešingosios kraštinės, AC, BD — įstrižainės.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$,

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$,

$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \ldots$

Keturkampiai → Neiškilieji

Iškilieji

Dvi poros lygiagrečių kraštinių → Lygiagretainiai

Viena pora lygiagrečių kraštinių → Trapecijos

Nėra lygiagrečių kraštinių

Visi kampai lygūs (statūs) → Stačiakampiai

Visos kraštinės lygios → Rombai

Dvi kraštinės (šoninės) lygios → Lygiašonės trapecijos

Du kampai statūs → Stačiosios trapecijos

Dvi poros gretimų kraštinių yra lygios (kitos dvi — ne) → Deltoidai

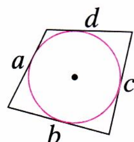
Stačiakampiai — Visos kraštinės lygios → Kvadratai

Rombai — Visi kampai lygūs → Kvadratai

Lygiagretainiai → Kvadratai

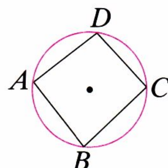
Į iškiląjį keturkampį, kurio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra lygios, galima įbrėžti apskritimą.

$$a + c = b + d$$



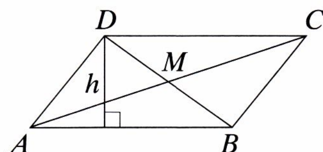
Apie keturkampį, kurio priešingųjų kampų sumos yra lygios (= 180°), galima apibrėžti apskritimą.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D \ (= 180^\circ)$$



Lygiagretainis

Keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas *lygiagretainiu.*

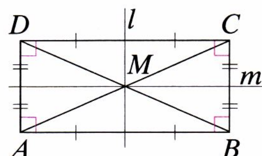


$ABCD$ — lygiagretainis ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$),
AC, BD — įstrižainės, h — aukštinė,
$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$,
$S_{ABCD} = AB \cdot h = AB \cdot AD \sin \angle DAB$.

1. Lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios: $AB = CD$, $AD = BC$.
2. Lygiagretainio priešingi kampai yra lygūs: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
3. Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas M kiekvieną įstrižainę dalija pusiau: $AM = MC$, $BM = MD$.
4. Lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo kraštinių ilgių kvadratų sumai: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.
5. Lygiagretainio kampų, esančių prie vienos kraštinės, suma lygi 180°: $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$.
6. Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.

Stačiakampis

Lygiagretainis, kurio visi kampai statūs, vadinamas *stačiakampiu.*

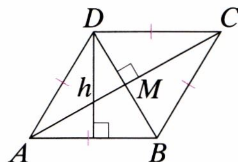


$ABCD$ — stačiakampis
($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$),
$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$,
$S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

1. Stačiakampio įstrižainės yra lygios: $AC = BD$.
2. Tiesės, einančios per priešingųjų kraštinių vidurio taškus, yra stačiakampio simetrijos ašys (l ir m).
3. Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.
4. Apie stačiakampį galima apibrėžti apskritimą.

Rombas

Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *rombu.*

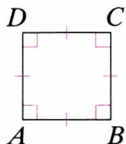


$ABCD$ — rombas ($AB = BC = CD = DA$),
$P_{ABCD} = 4AB$,
$S_{ABCD} = AB \cdot h = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

1. Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu ir rombo kampus dalija pusiau: $AC \perp BD$, $\angle CAB = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle DBC$, $\angle ACB = \angle ACD$, $\angle CDB = \angle ADB$.
2. Tiesės, einančios per rombo įstrižaines (AC ir BD), yra jo simetrijos ašys.
3. Rombo įstrižainių susikirtimo taškas (M) yra jo simetrijos centras.
4. Į rombą galima įbrėžti apskritimą.

Kvadratas

Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai statūs, vadinamas *kvadratu.* Stačiakampis, kurio visos kraštinės lygios, yra *kvadratas.* Rombas, kurio visi kampai statūs, yra *kvadratas.*

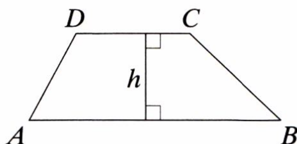


$ABCD$ — kvadratas
($AB = BC = CD = DA$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$),
$P_{ABCD} = 4AB$, $S_{ABCD} = AB^2$.

1. Kvadrato simetrijos ašys yra tiesės, einančios per jo įstrižaines, ir tiesės, einančios per jo priešingų kraštinių vidurio taškus; kvadrato simetrijos centras yra taškas, kuriame susikerta jo simetrijos ašys.
2. Apie kvadratą galima apibrėžti apskritimą; į kvadratą galima įbrėžti apskritimą.

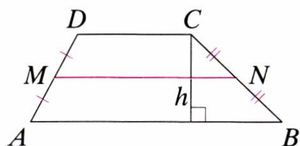
Trapecija

Keturkampis, kurio dvi priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi nėra lygiagrečios, vadinamas *trapecija.*



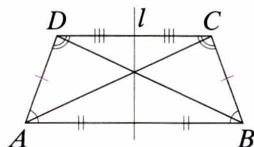
$ABCD$ — trapecija ($AB \parallel CD$, $AD \nparallel BC$),
AB, CD — pagrindai, AD, BC — šoninės kraštinės,
h — aukštinė.
$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180°$,
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$,
$S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot h$.

Atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus, vadinama trapecijos *vidurine linija.*
Trapecijos vidurinė linija yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.



MN — vidurinė linija ($AM = MD$, $BN = NC$),
$MN \parallel AB$, $MN \parallel CD$, $MN = \frac{AB+CD}{2}$.
$S_{ABCD} = MN \cdot h$.

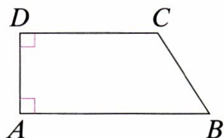
Lygiašonė trapecija
Trapecija, kurios šoninės kraštinės yra lygios, vadinama *lygiašone* trapecija.



$ABCD$ — lygiašonė trapecija ($AD = BC$).

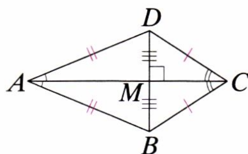
1. Lygiašonės trapecijos kampai prie kiekvieno pagrindo yra lygūs: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$.
2. Lygiašonės trapecijos įstrižainės yra lygios: $AC = BD$.
3. Tiesė, einanti per lygiašonės trapecijos pagrindų vidurio taškus (l), yra jos simetrijos ašis.
4. Apie lygiašonę trapeciją galima apibrėžti apskritimą.

Stačioji trapecija
Trapecija, kurios viena šoninė kraštinė yra statmena pagrindams, vadinama *stačiąja* trapecija.



$ABCD$ — stačioji trapecija ($AD \perp AB$, $AD \perp CD$),
$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD$.

Deltoidas
Keturkampis, kuris turi dvi poras lygių gretimų kraštinių (bet visos 4 kraštinės nėra lygios), vadinamas *deltoidu.*

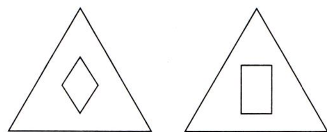


$ABCD$ — deltoidas
($AB = AD$, $BC = CD$ ir $AB \neq BC$, $AD \neq DC$),
$P_{ABCD} = 2(AB + BC)$,
$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$.

Viena deltoido įstrižainė (AC) yra jo simetrijos ašis.

Pratimai ir uždaviniai

276. Kaip su liniuote galima įsitikinti, kad namo palėpės gale išpjauta ertmė yra:
a) rombas; b) stačiakampis?



277. Vienos lygiagretainio kraštinės ilgis sudaro 75% kitos kraštinės ilgio. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą, jei trumpesnioji lygiagretainio kraštinė lygi 12 cm.

278. Lygiagretainio kampo pusiaukampinė dalija priešingą kraštinę į dvi 4 cm ir 5,5 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.

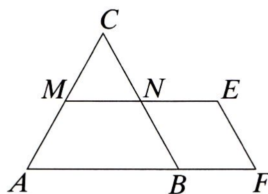
279. Lygiagretainio $ABCD$ kampo A pusiaukampinės AE ilgis yra 6 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą, jei:
a) $P_{ABE} = 14$ cm, $BE = EC$; b) $P_{ABE} = 14$ cm, $BE : EC = 2 : 1$.

280. a) Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 480 cm^2, o aukštinių išvestų iš viršūnės B ilgiai yra 12 cm ir 30 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio perimetrą.
b) Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 480 cm^2, o perimetras yra 112 cm. Vienos lygiagretainio aukštinės ilgis yra 30 cm. Apskaičiuokite kitos lygiagretainio aukštinės ilgį.

281. Lygiagretainio dvi gretimos kraštinės yra 4 cm ir 12 cm ilgio, o kampas tarp jų lygus 70°. Apskaičiuokite:
a) lygiagretainio plotą (1 cm^2 tikslumu);
b) lygiagretainio įstrižainių ilgius (1 cm tikslumu);
c) kampą tarp lygiagretainio įstrižainių (1° tikslumu).

282. Lygiagretainio įstrižainės yra 7 dm ir 11 dm ilgio. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgius, jeigu viena iš jų 1 dm trumpesnė už kitą.

283. MN — trikampio ABC vidurinė linija. Jos tęsinyje atidėta atkarpa $NE = MN$ ir nubraižytas lygiagretainis $NBFE$. Apskaičiuokite lygiagretainio $NBFE$ plotą, jeigu trikampio ABC plotas lygus 30 cm^2.



284. Lygiagretainio aukštinė, išvesta iš bukojo kampo viršūnės, šį kampą dalija santykiu 2 : 3. Apskaičiuokite lygiagretainio kampus.

285. Stačiakampio formos žemės sklypo ilgis ir plotis sutinka kaip 5 : 3. Apskaičiuokite, kiek metrų tvoros reikia šiam sklypui aptverti, jei sklypo ilgis 400 m ilgesnis už jo plotį. Koks šio sklypo plotas hektarais?

286. Taškai A_1, B_1 ir C_1 yra stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90°$) kraštinių BC, CA ir AB vidurio taškai. Įrodykite, kad $A_1B_1 = CC_1$.

287. Stačiakampio kraštinės yra 5,4 dm ir 7,7 dm ilgio. Apskaičiuokite kampus, kuriuos sudaro stačiakampio įstrižainė su jo kraštinėmis (1° tikslumu).

288. Stačiakampio kraštinės yra 5 cm ir 12 cm ilgio. Apskaičiuokite apie šį stačiakampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

289. Rombo įstrižainių ilgiai yra 6 dm ir 8 dm. Apskaičiuokite:
a) rombo perimetrą; b) rombo plotą; c) rombo aukštinės ilgį;
d) į šį rombą įbrėžto apskritimo spindulio ilgį.

290. Viena rombo įstrižainė lygi jo kraštinei. Apskaičiuokite rombo kampus.

291. Rombo aukštinė dalija kraštinę pusiau. Apskaičiuokite rombo kampus.

292. Rombo kraštinė su įstrižainėmis sudaro kampus, kurių didumų skirtumas lygus 15°. Apskaičiuokite rombo kampus.

293. a) Keturkampis, kurio visos kraštinės lygios, yra rombas. Įrodykite.
b) Lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos, yra rombas. Įrodykite.

294. Iš vienos rombo viršūnės nubrėžta įstrižainė ir aukštinė. Ši įstrižainė yra 36 cm, o aukštinė — 24 cm ilgio. Apskaičiuokite rombo kampus (1° tikslumu).

295. Į 4 cm spindulio apskritimą įbrėžtas kvadratas. Apskaičiuokite kvadrato perimetrą ir plotą. Koks į šį kvadratą įbrėžto apskritimo spindulio ilgis?

296. Stačiosios trapecijos viena šoninė kraštinė 2 kartus ilgesnė už kitą. Apskaičiuokite trapecijos kampus.

297. Lygiašonės trapecijos aukštinė dvigubai trumpesnė už šoninę kraštinę. Apskaičiuokite trapecijos kampus.

298. a) Trapecijos vienas pagrindas yra 20 cm, o vidurinė linija — 18 cm ilgio. Kampai prie šio pagrindo yra lygūs, o įstrižainės dalija juos pusiau. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.
b) Trapecijos perimetras lygus 49 cm, o vidurinė linija yra 12,5 cm ilgio. Apskaičiuokite šoninių trapecijos kraštinių ilgius, jeigu viena iš jų 2 kartus ilgesnė už kitą.

299. Lygiašonės trapecijos trys kraštinės yra lygios, o apatinis pagrindas 6 cm ilgesnis už kiekvieną kitą kraštinę. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį, jeigu trapecijos perimetras lygus 54 cm.

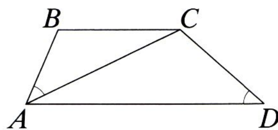
300. Lygiašonės trapecijos pagrindai yra 21 cm ir 39 cm, o įstrižainė — 50 cm ilgio. Apskaičiuokite trapecijos plotą ir perimetrą.

301. Plane, kurio mastelis yra 1 : 5000, žemės sklypas pavaizduotas stačiąja trapecija, kurios pagrindai yra 4 cm ir 6 cm ilgio, o aukštinė lygi 6 cm.
a) Apskaičiuokite žemės sklypo plotą hektarais.
b) Kiek metrų (0,01 tikslumu) tvoros reikia šiam sklypui aptverti?

302. 1) Nubraižykite keturkampį $ABCD$, kurio viršūnių koordinatės yra $A(0; -4)$, $B(-4; 0)$, $C(0; 4)$ ir $D(8; 4)$.
2) Įrodykite, kad nubraižytas keturkampis yra trapecija.
3) Apskaičiuokite šios trapecijos plotą.

303. Geležinkelio pylimo skerspjūvis yra lygiašonės trapecijos formos. Apskaičiuokite pylimo aukštį, jei jo pagrindai yra 8 m ir 28 m ilgio, o šoninės kraštinės pasvirusios į pagrindą 31° kampu.

304. Keturkampis $ABCD$ — trapecija.
$\angle BAC = \angle CDA$, $AD = 12$ cm,
$AC = 9$ cm, $CD = 7{,}5$ cm.
Apskaičiuokite AB ir BC.



305. Trapecijos pagrindai yra 20 cm ir 32 cm, o aukštinė — 24 cm ilgio. Kokiu atstumu nuo apatinio trapecijos pagrindo susikerta tiesės, einančios per šonines trapecijos kraštines?

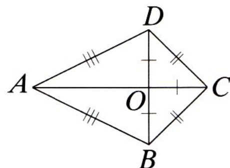
306. Trapecijos pagrindai yra 36 cm ir 60 cm, o aukštinė — 32 cm ilgio. Apskaičiuokite atstumą nuo tiesių, einančių per trapecijos šonines kraštines, susikirtimo taško iki viršutinio trapecijos pagrindo.

307. Trapecijos pagrindai yra 48 cm ir 18 cm, o šoninės kraštinės — 27 cm ir 21 cm ilgio. Trapecijos šoninės kraštinės pratęstos iki jų susikirtimo. Apskaičiuokite ilgius trapecijos šoninių kraštinių tęsinių iki susikirtimo taško.

308. Trapecijos pagrindai yra 16 cm ir 40 cm, o įstrižainės — 35 cm ir 42 cm ilgio. Apskaičiuokite ilgius įstrižainių atkarpų, į kurias dalija įstrižaines jų susikirtimo taškas.

309. Trapecijos pagrindų ilgių santykis 3 : 5. Trapecijos įstrižainės yra 24 cm ir 32 cm ilgio. Apskaičiuokite ilgius įstrižainių atkarpų, į kurias jos dalijasi susikirtimo taške.

310. Duota: $AO = 2OC$, $AD = 5$.
Rasti: P_{ABCD}, S_{ABCD}.



311. Įbrėžtinio keturkampio trijų, paeiliui einančių, kampų didumų santykis $2 : 3 : 4$. Apskaičiuokite ketvirtąjį kampą.

312. Apie skritulį apibrėžta trapecija, kurios perimetras lygus 40 cm. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

313. Apibrėžtinio keturkampio trijų, paeiliui einančių, kraštinių ilgių santykis $2 : 3 : 4$. To keturkampio perimetras lygus 72 cm. Koks ketvirtos kraštinės ilgis?

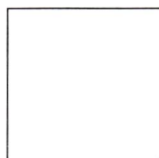
314. Keturkampio kraštinės lygios 5 dm, 8 dm, 6 dm ir 9 dm, o plotas — 40 dm^2. Į šį keturkampį panašaus keturkampio perimetras yra 1,5 karto didesnis. Apskaičiuokite to keturkampio kraštinių ilgius ir plotą.

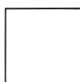
315. Dviejų panašiųjų daugiakampių plotai lygūs 432 cm^2 ir 192 cm^2, o jų perimetrų skirtumas yra 40 cm. Apskaičiuokite daugiakampių perimetrus.

316. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) įstrižainės susikerta taške O. Trikampių BOC ir AOD plotai atitinkamai lygūs 48 cm^2 ir 108 cm^2, o trapecijos vidurinės linijos ilgis yra 20 cm. Apskaičiuokite:
a) trapecijos plotą; b) trapecijos įstrižainių ilgius.

317. Nubraižykite:
a) lygiagretainį, kurio dvi kraštinės yra 4 cm ir 6 cm, o įstrižainė — 8 cm ilgio;
b) lygiagretainį, kurio įstrižainės yra 10 cm ir 12 cm ilgio, o kampas tarp jų lygus 70°;
c) stačiakampį, kurio viena kraštinė yra 5 cm, o įstrižainė — 12 cm ilgio;
d) rombą, kurio įstrižainės yra 16 cm ir 20 cm ilgio;
e) trapeciją, kurios pagrindai yra 10 dm ir 18 dm, aukštinė — 12 dm ir viena šoninė kraštinė — 13 dm ilgio.

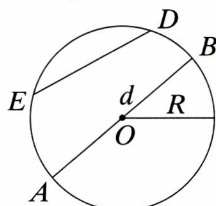
318. Nubraižykite kvadratą, kurio plotas lygus dviejų duotųjų kvadratų:
a) plotų sumai; b) plotų skirtumui.


2 cm

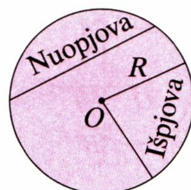

1 cm

4 Apskritimas. Skritulys

Apskritimu vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško (apskritimo centro). Plokštumos dalis, apribota apskritimu, vadinama *skrituliu*. Apskritimo taškai taip pat priklauso skrituliui.

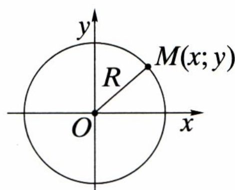


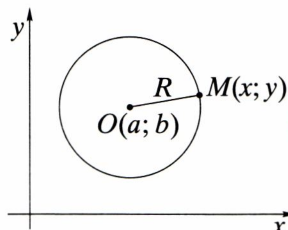
O — apskritimo centras,
R — spindulys,
ED — styga,
$AB = d = 2R$ — skersmuo,
$C = 2\pi R = \pi d$ — apskritimo ilgis,
$S = \pi R^2$ — skritulio plotas,
$\pi = 3{,}14159265...$



Apskritimas (skritulys) turi be galo daug simetrijos ašių — tai kiekviena tiesė, einanti per jo centrą.
Apskritimo (skritulio) centras yra jo simetrijos centras.

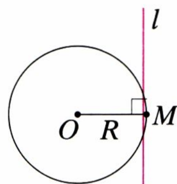
Apskritimo lygtis





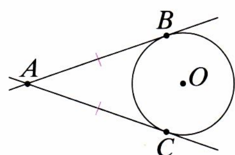
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Apskritimo ir tiesės tarpusavio padėtis
Jei apskritimas su tiese turi tik vieną bendrą tašką, tai ta tiesė vadinama apskritimo *liestine.*



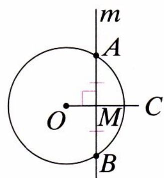
l — liestinė,
M — lietimosi taškas,
$l \perp OM$ — liestinė yra statmena spinduliui, nubrėžtam į lietimosi tašką,
$OM = R$ — atstumas nuo apskritimo centro iki liestinės.

Per tašką, esantį šalia apskritimo, galima nubrėžti dvi liestines.



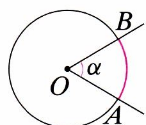
AB, AC — liestinės,
$AB = AC$ — apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpos yra lygios.

Jei apskritimas su tiese turi du bendrus taškus, tai ta tiesė vadinama apskritimo *kirstine*.



m — kirstinė,
AB — styga,
$OC \perp AB$ — spindulys statmenas stygai,
$MA = MB$ — stygai statmenas apskritimo spindulys (skersmuo) dalija tą stygą pusiau.

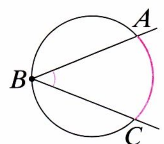
Apskritimo ir kampo tarpusavio padėtis
Jei apskritimo centras sutampa su kampo viršūne, tai tas kampas vadinamas *centriniu* kampu.



$\angle AOB$ — centrinis kampas,
$\smile AB$ — centrinį kampą AOB atitinkantis lankas.

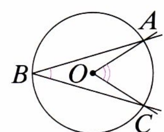
$\smile AB = \alpha$ — lanko didumas (laipsniais) lygus jį atitinkančio centrinio kampo didumui ($\angle AOB = \alpha$);
$\smile AB = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ — ilgis (ilgio vienetais) lanko, atitinkančio α laipsnių centrinį kampą;
$S_{išp} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$ — plotas išpjovos, atitinkančios α laipsnių centrinį kampą.

Jei apskritimas eina per kampo viršūnę, o kampo kraštinės kerta tą apskritimą, tai tas kampas vadinamas *įbrėžtiniu* kampu.



$\angle ABC$ — įbrėžtinis kampas,
$\smile AC$ — įbrėžtinį kampą ABC atitinkantis lankas.

Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, yra lygūs.
Įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei jį atitinkančio centrinio kampo didumo.



$\angle ABC$ — įbrėžtinis kampas,
$\angle AOC$ — centrinis kampas,
$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$.

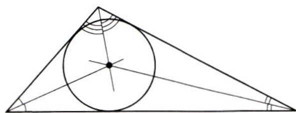
Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į skersmenį, yra status.

Įbrėžtinis ir apibrėžtinis apskritimai

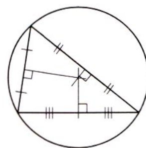
Įbrėžtu į daugiakampį apskritimu vadiname apskritimą, kuris liečia visas to daugiakampio kraštines. Įbrėžtinio apskritimo centras yra daugiakampio kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas.

Apibrėžtu apie daugiakampį apskritimu vadiname apskritimą, kuris eina per visas to daugiakampio viršūnes. Apibrėžtinio apskritimo centras yra daugiakampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.

Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą; apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą.

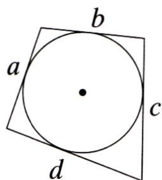


Įbrėžtinis apskritimas

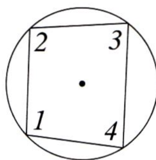


Apibrėžtinis apskritimas

Į iškiląjį keturkampį galima įbrėžti apskritimą, kai to keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios. Apie iškiląjį keturkampį galima apibrėžti apskritimą, kai to keturkampio priešingų kampų sumos yra lygios (= 180°).



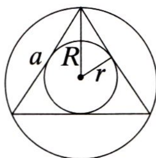
$a + c = b + d$



$\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 180°$

Į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą; apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą.

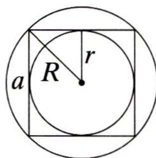
Lygiakraštis trikampis



$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

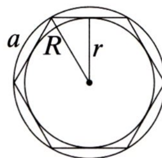
Kvadratas



$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{a}{2}$

Taisyklingasis šešiakampis

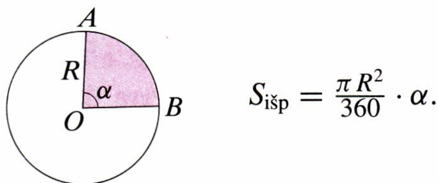


$R = a$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

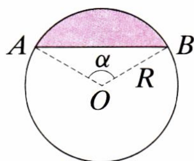
Skritulio išpjova ir nuopjova

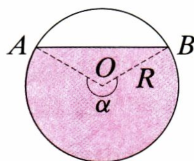
Centrinis kampas skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos išpjovomis.



$$S_{\text{išp}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Skritulio styga skritulį dalija į dvi dalis, kurios vadinamos nuopjovomis.





$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} - S_{\triangle AOB}$
$(\alpha < 180^\circ)$;

$S_{\text{nuop}} = S_{\text{išp}} + S_{\triangle AOB}$
$(\alpha > 180^\circ)$.

Pratimai ir uždaviniai

319. Skritulio ilgis yra 6π cm. Apskaičiuokite jo:
a) spindulį; b) skersmenį; c) plotą (0,01 cm^2 tikslumu).

320. Kaip pasikeis skritulio plotas, jei jo spindulį:

a) padidinsime 1,5 karto;
b) sumažinsime 2 kartus;
c) padidinsime 200%;
d) sumažinsime 75%?

321. Apskaičiuokite apskritimo ilgį, jeigu jis 10,7 cm didesnis už skersmenį ($\pi \approx 3{,}14$).

322. Apskrito pjūklo skersmuo yra 750 mm. Šio pjūklo dantis sukasi 30 m/s greičiu. Kiek kartų per minutę apsisuka pjūklas?

323. Parašykite lygtį apskritimo, kurio:
a) centras $O(-2; 3)$, o spindulys 5;
b) centras $O(2; 1)$, o apskritimas eina per tašką $A(-2; 4)$.

324. Parašykite lygtį apskritimo, kurio skersmens galų koordinatės yra:
a) (0; 3) ir (6; −7); b) (−2; 3) ir (2; 5).

325. a) Apskritimo lygtis yra $(x+1)^2+(y-2)^2=16$. Ar gali būti šio apskritimo skersmeniu atkarpa AB, kurios galų koordinatės yra $A(-1; 6)$, $B(-1; -2)$?

b) Apskritimo lygtis yra $(x+3)^2+y^2=9$. Ar gali būti šio apskritimo skersmeniu atkarpa CD, kurios galų koordinatės yra $C(-1; \sqrt{5})$ ir $D(-5; -\sqrt{5})$?

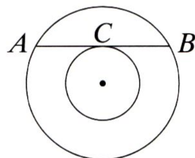
326. Iš taško A, nuo apskritimo centro nutolusio 13 cm atstumu, nubrėžta apskritimo liestinė. Apskaičiuokite atstumą nuo taško A iki lietimosi taško, jeigu apskritimo spindulys lygus 5 cm.

327. Iš taško, nuo apskritimo centro nutolusio $12\sqrt{3}$ atstumu, nubrėžtos dvi liestinės. Apskaičiuokite atstumą tarp lietimosi taškų, jeigu kampas tarp liestinių lygus 120°.

328. a) Apskaičiuokite ilgį apskritimo stygos, nuo centro nutolusios 3 cm atstumu, jeigu apskritimo skersmuo lygus 10 cm.

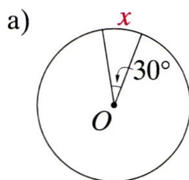
b) Raskite apskritimo ilgį, jeigu jo stygos, nutolusios nuo apskritimo centro 4 dm atstumu, ilgis yra 6 dm.

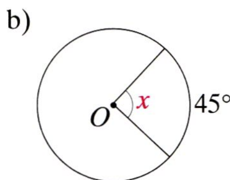
329. Dviejų koncentrinių apskritimų spinduliai lygūs 10 cm ir 26 cm. Didžiojo apskritimo styga AB liečia mažąjį apskritimą. Raskite stygos AB ilgį.

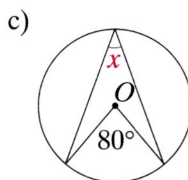


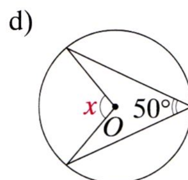
330. Atstumai nuo apskritimo skersmens galų iki liestinės lygūs 46 cm ir 28 cm. Apskaičiuokite apskritimo skersmens ilgį.

331. Raskite x:

a) 

b) 

c) 

d) 

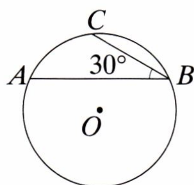
332. Styga apskritimą dalija į 2 dalis, kurių ilgių santykis yra:

a) 4 : 5; b) 5 : 7.

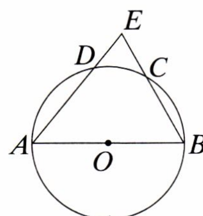
Kokiu kampu ši styga matoma iš apskritimo centro?

333. Apskritimas trimis taškais A, B ir C padalytas į tris lankus, kurių ilgių santykis yra 3 : 5 : 4. Apskaičiuokite trikampio ABC kampus.

334. Į apskritimą, kurio centras O, įbrėžtas kampas ABC. Apskaičiuokite kampo AOB didumą, jei $\angle ABC = 30^\circ$, o taškas C yra lanko AB vidurio taškas.

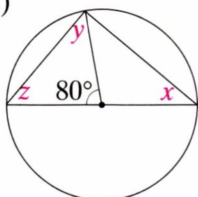


335. Duota: $\smile AD = 80^\circ$, $\smile CB = 60^\circ$.
Apskaičiuokite $\angle AEB$.

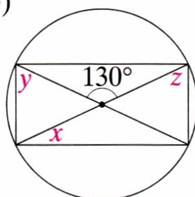


336. Apskaičiuokite kampų x, y ir z didumus:

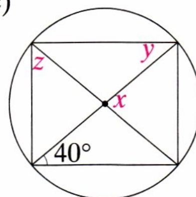
a)



b)



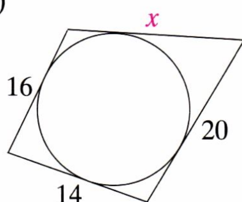
c)



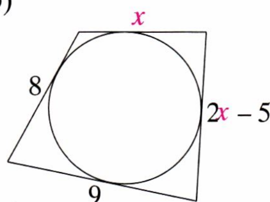
337. Trumpesniosios stačiakampio kraštinės ilgis yra 6 m, o kampas tarp įstrižainių lygus 60°. Apskaičiuokite apie šį stačiakampį apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

338. Raskite x:

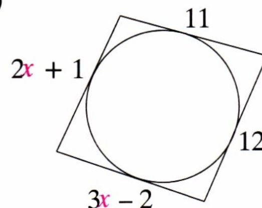
a)



b)



c)



339. Trijų iš eilės einančių keturkampio kraštinių ilgiai yra 10 cm, 14 cm ir 16 cm. Apskaičiuokite keturkampio perimetrą, jeigu į keturkampį galima įbrėžti apskritimą. Kuris iš duomenų yra nereikalingas?

340. Apie apskritimą apibrėžtos lygiašonės trapecijos pagrindai yra 4 cm ir 16 cm ilgio. Apskaičiuokite apskritimo spindulio ilgį.

341. Apie apskritimą apibrėžta trapecija, kurios perimetras lygus 48 cm. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

342. Apskritimo, įbrėžto į statųjį trikampį, lietimosi taškas dalija vieną trikampio statinį į 3 cm ir 5 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio plotą.

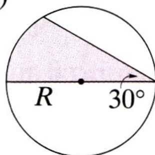
343. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Jo lietimosi taškas su įžambine pastarąją dalija į dvi 10 cm ir 24 cm ilgio dalis. Apskaičiuokite trikampio plotą.

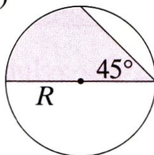
344. Į 6 cm spindulio apskritimą įbrėžtas taisyklingasis n-kampis. Raskite šio n-kampio kraštinės ilgį, jei:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

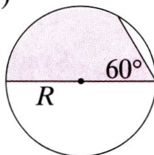
345. Taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgis yra 10 cm. Raskite į šį n-kampį įbrėžto apskritimo spindulį, jei:
a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

346. Skritulio spindulys yra 10 cm. Iš šio skritulio išpjauta išpjova, kurios centrinis kampas lygus $25°$.
a) Koks išpjovos lanko ilgis?
b) Koks likusios skritulio dalies plotas?

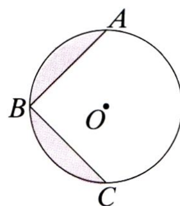
347. Raskite nuspalvintos skritulio dalies plotą:

a)


b)


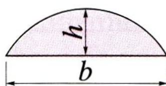
c)


348. Stygos AB ir BC iš apskritimo centro matomos $90°$ kampais. Raskite nuspalvintos skritulio dalies plotą, jei apskritimo spindulys yra R.



349. 1) Skritulio skersmuo lygus 10 cm. Raskite plotą nuopjovos, atkirstos styga, nuo skritulio centro nutolusia 3 cm.
2) Nuopjovos plotą apskaičiuokite pagal apytikslę formulę:

$$S_{\text{nuop}} \approx \frac{2}{3}bh$$

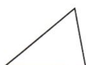


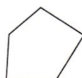
(Taip praktiškai skaičiuojamas nuopjovos plotas.) Raskite gautos apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą.

5 Iškilieji daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai

Daugiakampis, kuris yra į vieną pusę nuo kiekvienos tiesės, nubrėžtos per daugiakampio kraštinę, vadinamas *iškiluoju* daugiakampiu.

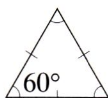
Trikampis *Keturkampis* *Penkiakampis* *Šešiakampis* ......



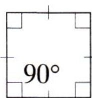



n-kampis turi n viršūnių, n kraštinių.
n-kampio vidaus kampų suma lygi $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
n-kampis vadinamas *taisyklinguoju*, kai jo visos kraštinės yra lygios ir visi kampai yra lygūs.
Taisyklingojo n-kampio kiekvieno kampo didumas lygus $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

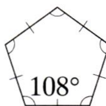
Trikampis *Keturkampis* *Penkiakampis* *Šešiakampis* ......

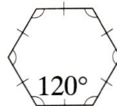


Lygiakraštis trikampis



Kvadratas





Į taisyklingąjį n-kampį galima įbrėžti apskritimą ir apie jį galima apibrėžti apskritimą (jų centrai sutampa).

Taisyklingasis daugiakampis	Perimetras, plotas	Įbrėžtinis apskritimas	Apibrėžtinis apskritimas
a	$P = 3a$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a, r; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	R, a; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
a	$P = 4a$ $S = a^2$	a, r; $r = \frac{a}{2}$	R, a; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
a	$P = 6a$ $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	r, a; $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	R, a; $R = a$

Pratimai ir uždaviniai

350. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio vienas kampas lygus:
a) $135°$; b) $150°$?

351. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas priekampis lygus:
a) $36°$; b) $24°$?

352. Ar egzistuoja taisyklingasis daugiakampis, kurio:
a) vidaus kampų suma lygi $1800°$;
b) vienas vidaus kampas lygus $150°$?

353. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, jei jo kraštinė 2 kartus ilgesnė už atstumą nuo daugiakampio kraštinės iki jo centro?

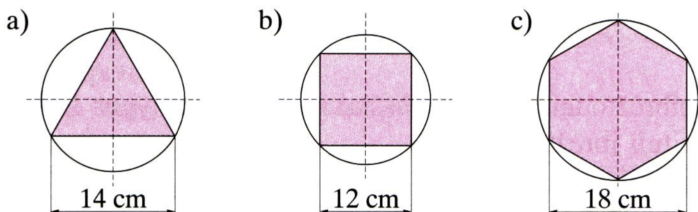
354. Raskite lygiakraščio trikampio kraštinės ilgį, jeigu apie šį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulių skirtumas yra 48 mm.

355. Kvadrato kraštinės ilgis yra 50 cm. Raskite apibrėžto apie šį kvadratą ir įbrėžto į šį kvadratą apskritimų spindulius (1 cm tikslumu).

356. Raskite (1 mm tikslumu) spindulį apskritimo, įbrėžto į kvadratą, jei apie jį apibrėžto apskritimo spindulys lygus 10 cm.

357. Į apskritimą, kurio spindulys yra 20 cm, įbrėžtas taisyklingasis šešiakampis. Keliais milimetrais apskritimo ilgis didesnis už šešiakampio perimetrą ($\pi \approx 3{,}14$)?

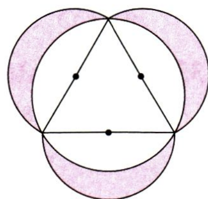
358. Koks turi būti apvalaus plieninio ruošinio skersmuo (0,1 cm tikslumu), kad iš jo būtų galima pagaminti nurodytos formos varžto galvutę?



359. Į skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio kraštinė nuo skritulio atkerta nuopjovą, kurios lanko ilgis yra 5 dm. Raskite šio šešiakampio perimetrą ir plotą ($\pi \approx 3{,}14$).

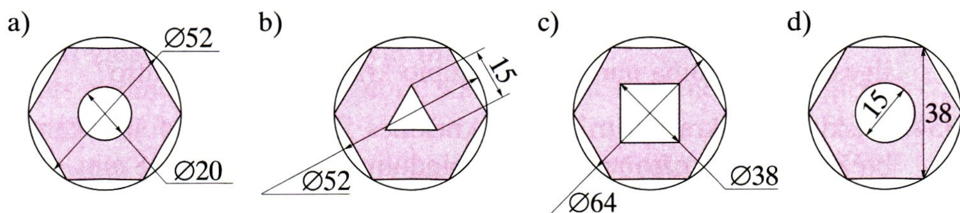
360. Į skritulį įbrėžtas taisyklingasis aštuonkampis. Apskaičiuokite jo kraštinės ilgį, perimetrą ir plotą, jeigu skritulio spindulys lygus 20 cm.

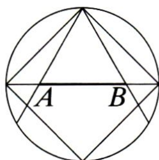
361. Taisyklingojo šešiakampio kas antra kraštinė yra į abi puses pratęsta. Įrodykite, kad gautos tiesės susikirsdamos sudaro taisyklingąjį trikampį. Apskaičiuokite to trikampio perimetrą ir plotą, jeigu šešiakampio kraštinės ilgis yra 48 mm.



362. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Ant jo kraštinių (kaip skersmenų) į išorę nubrėžti pusskrituliai. Įrodykite, kad gautų trijų „mėnuliukų" plotų sumos ir trikampio ploto skirtumas lygus $\frac{1}{8}$ duotojo skritulio ploto.

363. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą. (Matmenys nurodyti milimetrais.) Atsakymą suapvalinkite iki vienetų.





364. Į skritulį, kurio spindulys $R = 3\sqrt{3}$, įbrėžtas kvadratas. Iš vienos jo viršūnės nubrėžtos dvi stygos nuo skritulio atkertančios 120° lankus. Raskite kvadrato įstrižainės tarp šių stygų atkarpos AB ilgį.

365. Apskritimo spindulys yra 4 dm ilgio. Į šį apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis, o po to nubraižytas kvadratas, kurio kraštinė lygi trikampio kraštinei. Raskite apie kvadratą apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.

366. Apie skritulį apibrėžto taisyklingojo šešiakampio plotas $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ didesnis už į tą skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio plotą. Raskite skritulio spindulio ilgį.

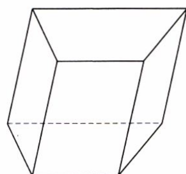
367. Apie skritulį apibrėžto taisyklingojo šešiakampio plotas lygus $108\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Raskite į šį skritulį įbrėžto:
a) taisyklingojo trikampio plotą;
b) kvadrato plotą;
c) taisyklingojo šešiakampio plotą.

368. Į skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio plotas lygus $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Raskite apie šį skritulį apibrėžto:
a) taisyklingojo trikampio plotą;
b) kvadrato plotą;
c) taisyklingojo šešiakampio plotą.

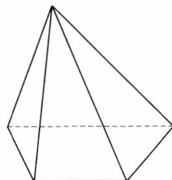
6 Briaunainiai

Briaunainiu vadiname kūną, apribotą daugiakampiais.

Prizmė



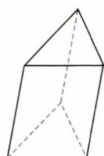
Piramidė



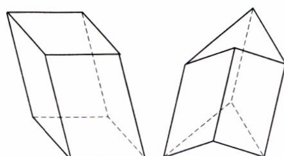
Prizmė

Prizme vadinamas briaunainis, kurio dvi sienos, vadinamos pagrindais, yra lygūs daugiakampiai, o kitos sienos (šoninės) — lygiagretainiai, kurių kiekvieno viena kraštinė yra viename pagrinde, o priešinga — kitame.

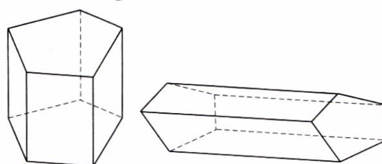
Trikampė prizmė



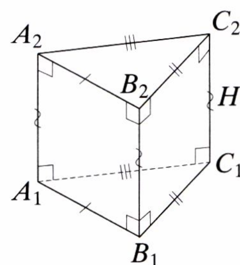
Keturkampės prizmės



Penkiakampės prizmės



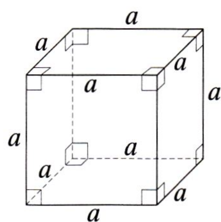
Prizmės, kurių visos šoninės sienos yra stačiakampiai, vadinamos *stačiosiomis* prizmėmis. Stačiosios prizmės šoninė briauna vadinama jos aukštine.



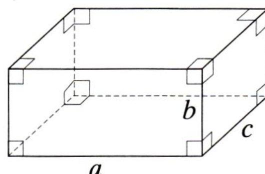
Trikampė stačioji prizmė $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$.
Pagrindai: $\triangle A_1B_1C_1$ ir $\triangle A_2B_2C_2$ (lygūs trikampiai).
Šoninės sienos: $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1C_2A_2A_1$ (stačiakampiai).
Aukštinė: $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = H$.
Pagrindo plotas $S_{\text{pagr}} = S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle A_2B_2C_2}$.
Šoninio paviršiaus plotas
$S_{\text{šon}} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{B_1C_1C_2B_2} + S_{C_1C_2A_2A_1}$.
Viso paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}}$.
Tūris $V = S_{\text{pagr}} \cdot H$.

Kubas ir stačiakampis gretasienis yra stačiosios prizmės.
Kubo visos sienos yra lygūs kvadratai.
Stačiakampio gretasienio priešingosios sienos yra lygūs stačiakampiai.

Kubas



Stačiakampis gretasienis



$S_{\text{pav}} = 6a^2$
$V = a^3$

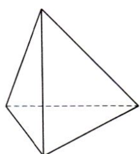
$S_{\text{pav}} = 2(ab + ac + bc)$
$V = abc$

Stačioji prizmė, kurios pagrindas yra *taisyklingasis daugiakampis*, vadinama *taisyklingąja prizme.*
Kadangi kubo pagrindai yra taisyklingieji keturkampiai (kvadratai), tai kubas yra taisyklingoji keturkampė prizmė.

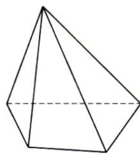
Piramidė

Piramide vadinamas briaunainis, kurio viena siena yra bet koks daugiakampis, o kitos sienos — trikampiai, turintys bendrą viršūnę. Tų trikampių kraštinės, esančios prieš bendrą viršūnę, sutampa su daugiakampio kraštinėmis.

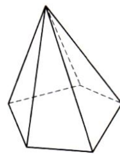
Trikampė piramidė



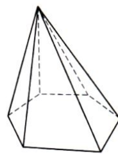
Keturkampė piramidė



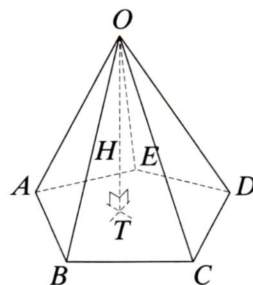
Penkiakampė piramidė



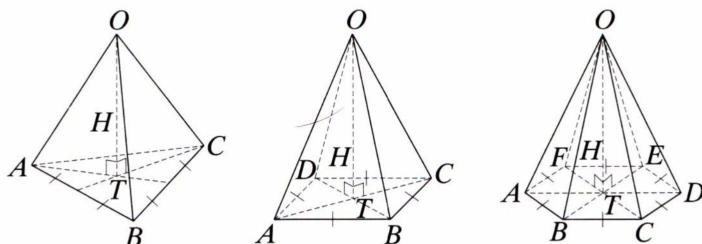
Šešiakampė piramidė



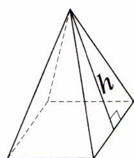
Penkiakampė piramidė $OABCDE$.
Piramidės viršūnė O.
Piramidės pagrindas $ABCDE$.
Šoninės sienos: OAB, OBC, OCD, ODE, OEA.
Šoninės briaunos: OA, OB, OC, OD, OE.
Piramidės aukštinė $OT = H$ — statmuo iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą.
Pagrindo plotas $S_{\text{pagr}} = S_{ABCDE}$.
Šoninio paviršiaus plotas
$S_{\text{šon}} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ODE} + S_{\triangle OEA}$.
Viso paviršiaus plotas $S_{\text{pav}} = S_{\text{pagr}} + S_{\text{šon}}$.
Tūris $V = \frac{1}{3} S_{\text{pagr}} \cdot H$.



Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinė eina per pagrindo centrą, vadinama *taisyklingąja* piramide.

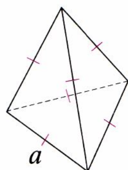


Taisyklingosios piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Šoninės sienos aukštinė, išvesta iš piramidės viršūnės, vadinama *apotema*. Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei.



$S_{\check{s}on} = \frac{1}{2}P \cdot h$;
čia P — pagrindo perimetras,
h — apotemos ilgis.

Piramidė, kurios visos keturios sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, vadinama *tetraedru*.



$S_{\check{s}on} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$; $S_{pav} = \sqrt{3}a^2$.
$V = \frac{1}{3}S_{pagr} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Pratimai ir uždaviniai

369. Kubo paviršiaus plotas yra $216\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite kubo tūrį.

370. Raskite taisyklingosios trikampės prizmės aukštį, jeigu jos pagrindo plotas lygus $16\,\text{m}^2$, o tūris yra $112\,\text{m}^3$.

371. Stačiosios trikampės prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio statiniai yra 8 dm ir 6 dm ilgio. Prizmės aukštinė lygi 20 dm. Raskite prizmės tūrį, šoninio ir viso paviršiaus plotus.

372. Akvariumas yra stačiakampio gretasienio formos. Akvariumo pagrindo plotis yra 37,5 cm, o ilgis — 80 cm.

a) Raskite akvariumo aukštį, jeigu į jį telpa $0,18\,m^3$ vandens.

b) Iš akvariumo išpylė 45 ℓ vandens. Keliais centimetrais sumažėjo vandens aukštis akvariume?

373. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi 30 cm, o jo ilgio, pločio ir aukščio santykis yra 2 : 1 : 2. Raskite gretasienio tūrį ir viso paviršiaus plotą.

374. a) Stačiakampio gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite tos įstrižainės ilgį, jei gretasienio pagrindo kraštinės yra 15 dm ir 36 dm ilgio.

b) Stačiakampio gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite gretasienio tūrį ir viso paviršiaus plotą, jei jo pagrindo kraštinės yra 24 cm ir 45 cm ilgio.

375. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio tūrį ir viso paviršiaus plotą, jeigu:

a) pagrindo kraštinės yra 9 cm ir 16 cm ilgio, o šoninių sienų įstrižainių ilgiai sutinka kaip 3 : 4;

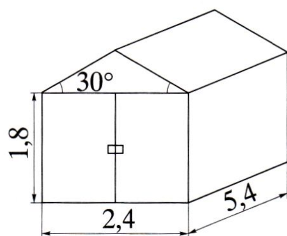
b) pagrindo perimetras lygus 72 cm, o šoninių sienų įstrižainės yra 25 cm ir 29 cm ilgio.

376. Stačiakampio gretasienio šoninių sienų įstrižainės su pagrindo plokštuma sudaro 30° ir 60° kampus, o pagrindo įstrižainė lygi $\sqrt{30}$ cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

377. Stačiakampio gretasienio sienų įstrižainės yra 19 cm, 11 cm ir 20 cm ilgio. Raskite gretasienio įstrižainės ilgį.

378. Stačiosios trikampės prizmės šoninių sienų įstrižainės lygios 9 cm, 15 cm ir $10\sqrt{2}$ cm. Raskite prizmės pagrindo kraštinių ilgius, jeigu pagrindas yra statusis trikampis.

379. Metalinio garažo matmenys nurodyti brėžinyje (metrais).



a) Kiek reikia kvadratinių metrų ($1\,m^2$ tikslumu) skardos tokio garažo statybai?

b) Apskaičiuokite garažo tūrį ($1\,m^3$ tikslumu).

380. Raskite tūrį taisyklingosios šešiakampės piramidės, kurios pagrindo kraštinė lygi 6 dm, o aukštinė — 30 dm.

381. Taisyklingosios keturkampės piramidės tūris lygus 125 cm^3, o pagrindo kraštinės ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį.

382. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 8 dm, o šoninės sienos aukštinė (apotema) — 10 dm. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį ir viso paviršiaus plotą.

383. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 30 cm, o šoninės sienos apotema — 39 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą, viso paviršiaus plotą ir tūrį.

384. Apskaičiuokite tūrį ir viso paviršiaus plotą taisyklingosios keturkampės piramidės, kurios aukštinė lygi 8 dm, o šoninė briauna — $\sqrt{136}$ dm.

385. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 10 m, o šoninės sienos aukštinė (apotema) — 15 m. Raskite šios piramidės šoninio ir viso paviršiaus plotus.

386. a) Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi 30 cm ir į pagrindo plokštumą pasvirusi 30° kampu. Raskite piramidės pagrindo kraštinės ilgį ir tūrį.

b) Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra 15 cm, o šoninė briauna į pagrindo plokštumą pasvirusi 60° kampu. Raskite piramidės tūrį.

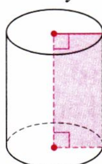
387. Taisyklingosios trikampės piramidės $ABCD$ pagrindas yra trikampis ABC, o sienos ADB kampas prie viršūnės — status. Apskaičiuokite piramidės tūrį, jei piramidės:

a) pagrindo kraštinė lygi a; b) piramidės aukštinė lygi h.

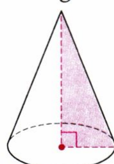
7 Sukiniai

Erdviniai kūnai, kurie gaunami sukant plokštumos figūrą apie pasirinktą tiesę, vadinami *sukiniais*.
Stačiakampį sukdami apie jo kraštinę gauname *ritinį*, statųjį trikampį sukdami apie jo statinį — *kūgį*, pusskritulį sukdami apie jo skersmenį — *rutulį*.

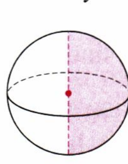
Ritinys



Kūgis

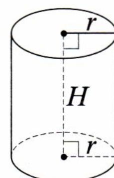


Rutulys



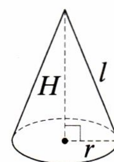
Ritinys

H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = 2\pi r H$,
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + 2S_{\text{pagr}} = 2\pi r H + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r)$,
$V = \pi r^2 H$.



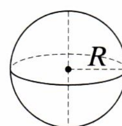
Kūgis

H — aukštinė,
r — pagrindo spindulys,
l — sudaromoji,
$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$,
$S_{\text{šon}} = \pi r l$,
$S_{\text{pav}} = S_{\text{šon}} + S_{\text{pagr}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.



Rutulys

Sferos paviršiaus plotas $S = 4\pi R^2$.
Rutulio tūris $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Pratimai ir uždaviniai

388. Ritinio pagrindo spindulys yra 2 cm, o aukštis — 4 cm. Raskite ritinio:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

389. Ritinio formos konservų dėžutės skersmuo lygus 12 cm. Koks turi būti dėžutės aukštis (0,1 cm tikslumu), kad jos tūris būtų $0{,}5\,\ell$?

390. Ritinio formos skardinės dėžutės (su dangčiu) aukštis yra 20 cm, o pagrindo skersmuo lygus 10 cm. Koks turi būti aukštis dėžutės, kurios pagrindo skersmuo yra 20 cm, kad jos tūris būtų lygus pirmosios dėžutės tūriui?

391. Stačiakampio formos geležinio lakšto ilgis yra 1,6 m, o plotis — 0,8 m. Šis lakštas sulenktas į ritinį dviem būdais. Raskite gautų ritinių tūrių santykį.

392. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus $72\,\text{cm}^2$, o pagrindo skersmuo 1 cm ilgesnis už aukštinę. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

393. a) Kiek litrų benzino telpa į ritinio formos cisterną, kurios pagrindo apskritimo ilgis lygus 125,6 dm, o aukštis — 50 dm ($\pi \approx 3{,}14$)? Kiek sveria benzinas, jei benzino tankis $\rho = 720\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?
b) Kiek tonų naftos telpa į ritinio formos cisterną, kurios pagrindo skersmuo lygus 18 m, o aukštis — 7 m ($\pi \approx 3{,}14$)? Naftos tankis yra $850\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

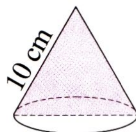
394. Iš ritinio formos 10 m ilgio rąsto reikia išpjauti gegnę. Gegnės skerspjūvis turi būti kvadratas, kurio kraštinė lygi 20 cm.
a) Kokio mažiausio skersmens gali būti rąstas?
b) Kiek bus kubinių metrų atliekų gaminant 250 tokių gegnių ($\pi \approx 3{,}14$)?

395. Kūgio sudaromoji yra 5 cm, o pagrindo spindulys — 3 cm ilgio. Raskite kūgio:
a) viso paviršiaus plotą; b) tūrį.

396. Kūgio aukštinė lygi 10 cm, o tūris yra $376{,}8\,\text{cm}^3$. Raskite kūgio pagrindo spindulio ilgį ($\pi \approx 3{,}14$).

397. Apskaičiuokite masę varinio kūgio, kurio sudaromoji yra 17 cm, o pagrindo spindulys — 8 cm ilgio ($\pi \approx 3{,}14$). Vario tankis $\rho = 8800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

398. Kūgio ašinis pjūvis yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė yra 10 cm ilgio. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą ir tūrį.



399. Grūdų krūva yra kūgio, kurio aukštinė lygi 3,6 m, o pagrindo apskritimo ilgis — 20 m, formos. Kiek tonų grūdų yra šioje krūvoje, jeigu 1 m^3 grūdų sveria 750 kg ($\pi \approx 3,14$)? Atsakymą parašykite dešimtųjų tikslumu.

400. Kiek kūgių, kurių aukštinė 5 dm, o pagrindo skersmuo — 2 dm, galima išlydyti iš alavinio ritinio, kurio aukštis 20 dm, o pagrindo skersmuo 4 dm?

401. Šieno kupeta yra ritinio su kūgiška viršūne formos. Kupetos pagrindo spindulys lygus 2,5 m, o aukštis — 4 m. Raskite šieno kupetos masę, jei ritiniška kupetos dalis yra 2,2 m aukščio, o šieno tankis yra 0,03 $\frac{g}{cm^3}$.

402. Skystis iš kūgio formos indo, kurio aukštis yra 0,18 m, o pagrindo skersmuo lygus 0,24 m, perpiltas į ritinio formos indą. To indo pagrindo skersmuo lygus 0,1 m, o aukštis — 1,25 m. Kiek procentų antrojo indo tūrio užims perpiltas vanduo?

403. Kūgis ir ritinys turi lygias aukštines ir vienodus pagrindus. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampo prie viršūnės didumą, jei kūgio ir ritinio šoninių paviršių plotai yra lygūs.

404. Apskaičiuokite rutulio spindulį, jei jo tūris lygus $36\pi\,dm^3$.

405. Apskaičiuokite paviršiaus plotą sferos, kurios spindulys lygus 5 cm. Atsakymą parašykite 1 cm^2 tikslumu.

406. a) Rutulys, kurio spindulys lygus 3,4 cm, perkirstas plokštuma nuo rutulio centro nutolusia 1,6 cm atstumu. Raskite pjūvio plotą.
b) Rutulį, kurio spindulys lygus 17 dm, kerta plokštuma, nuo centro nutolusi 8 dm atstumu. Apskaičiuokite pjūvio plotą.
c) Per rutulio spindulio vidurį išvesta plokštuma statmena spinduliui. Raskite rutulio spindulį, jei pjūvio plotas lygus 28,26 cm^2 ($\pi \approx 3,14$).

407. a) Medinio kubo briauna lygi 15 cm. Iš šio kubo ištekinti 8 vienodi rutuliukai, kurių vieno skersmuo yra 7 cm. Kieno paviršiaus plotas didesnis: kubo ar 8 rutuliukų? (Laikykite $\pi \approx 3,14$.)
b) Alavinio rutulio skersmuo lygus 30 cm. Kiek 3 cm skersmens rutuliukų galima išlydyti iš to rutulio?

408. Kūgio sudaromoji lygi pagrindo skersmeniui ir lygi 8 cm. Raskite rutulio spindulį, jeigu rutulio paviršiaus plotas lygus šio kūgio šoninio paviršiaus plotui.

1 užduotis

1. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1}{7} - 0,3$; (*1 taškas*)

b) $\frac{3}{5} \cdot 0,1$; (*1 taškas*)

c) $\frac{-3(\sqrt{25}-1)}{4^2}$. (*2 taškai*)

2. Koks ženklas ($>$, $<$, $=$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlio:

a) $-3 \square -4$; (*1 taškas*)

b) $\frac{1}{3} \square 0,3$; (*1 taškas*)

c) $5^{13} \square 5^{14}$; (*1 taškas*)

d) $1,1 \cdot 10^{12} \square 1,1 \cdot 10^{-12}$; (*1 taškas*)

e) $(-2)^2 \square \sqrt{16}$? (*1 taškas*)

3. a) Raskite 5% skaičiaus 10. (*2 taškai*)
b) Raskite skaičių, kurio 5% lygu 10. (*2 taškai*)

4. Suapvalinkite skaičių 13,45 iki dešimtųjų ir raskite gautos apytikslės reikšmės:

a) absoliučiąją paklaidą; (*1 taškas*)

b) santykinę paklaidą; (*1 taškas*)

c) santykinę paklaidą procentais. (*1 taškas*)

5. a) Dydžiai X ir Y yra tiesiogiai proporcingi. Pabaikite pildyti lentelę:

X	1		3	4
Y		6		12

(*2 taškai*)

b) Ar dydžiai X ir Y yra atvirkščiai proporcingi?

X	1	2	3	4
Y	100	50	25	0

(*2 taškai*)

6. Suprastinkite:

a) $5(a-2) - 4(2-a)$; (*1 taškas*)

b) $\frac{a^2-25}{25-10a+a^2}$; (*2 taškai*)

c) $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$. (*2 taškai*)

7. Išspręskite lygtį:

a) $2x - 10 = 0$; (*1 taškas*)

b) $x(x-3) = 0$; (*1 taškas*)

c) $\frac{5-x}{x} = 0$; (*1 taškas*)

d) $x(x-3) = -2$; (*2 taškai*)

e) $x^2 = 2$. (*2 taškai*)

8. Išspręskite nelygybę:

a) $-2x > x - 1$; (*2 taškai*)

b) $x^2 - 4x \leqslant 0$. (*2 taškai*)

9. Išspręskite sistemą:

a) $\begin{cases} 4x - 9y = 14, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ (*2 taškai*)

b) $\begin{cases} 5x - 2 > 2x + 1, \\ 4(x^2 - 1) \leqslant (2x - 1)^2. \end{cases}$ (*2 taškai*)

10. Parke auga 3 rūšių medžiai. Iš viso parke auga 100 medžių: iš jų 25 medžiai yra pušys, 25% visų medžių yra beržai, o likę — ąžuolai. Pavaizduokite duomenis:

a) stulpeline diagrama; (*2 taškai*)

b) skrituline diagrama. (*2 taškai*)

11. Iš skaitmenų 1, 2 ir 3 sudaromi triženkliai skaičiai. Kiek skaičių galima sudaryti, jei:

a) skaičiuje skaitmenys nesikartoja; (*1 taškas*)

b) skaičiuje skaitmenys gali kartotis? (*2 taškai*)

12. Turime keturias užverstas korteles, ant kurių užrašytos raidės

| A | U | B | T |

a) Nežiūrint imama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad ant paimtos kortelės bus užrašyta balsė? (*1 taškas*)

b) Kokia tikimybė, kad iš šių kortelių sudėliotas žodis bus TABU? (*2 taškai*)

c) Kas labiau tikėtina: ar kad bus sudėliotas žodis TABU, ar žodis BATU? (*1 taškas*)

13. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką, jei:

a) $f(x) = 2x + 1$; (*1 taškas*)

b) $f(x) = \frac{2}{x}$; (*2 taškai*)

c) $f(x) = x^2 + 1$; (*2 taškai*)

d) $f(x) = \sqrt{x}$. (*2 taškai*)

14. Kostas dviračiu važiavo iš namų į sodą. Pirmuosius 10 kilometrų jis nuvažiavo per 2 valandas, o likusius 2 kilometrus — per 30 minučių.

a) Kokiu vidutiniu greičiu (km/h) Kostas važiavo pirmuosius 10 kilometrų? (*1 taškas*)

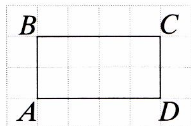
b) Kokiu vidutiniu greičiu (m/min) Kostas važiavo paskutiniuosius 2 kilometrus? (*2 taškai*)

c) Koks vidutinis visos kelionės greitis (km/h)? (*2 taškai*)

15. Nubraižykite figūrą, simetrišką figūrai $ABCD$:

a) tiesės CD atžvilgiu; (*1 taškas*)

b) taško D atžvilgiu. (*2 taškai*)

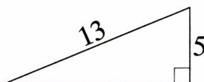


c) Ar figūra $ABCD$ turi simetrijos centrą? Jei turi, tai nurodykite jį. (*2 taškai*)

d) Ar figūra $ABCD$ turi simetrijos ašis? Jei turi, tai nubraižykite jas. (*2 taškai*)

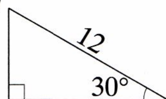
16. Apskaičiuokite nežinomas stačiojo trikampio kraštines:

a)



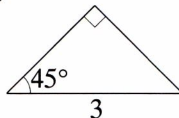
(*1 taškas*)

b)



(*2 taškai*)

c)

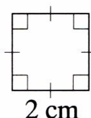


(*3 taškai*)

Raskite šių trikampių perimetrus ir plotus. (*6 taškai*)

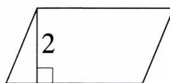
17. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą:

a)



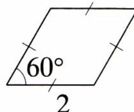
2 cm
(*1 taškas*)

b)



10
(*2 taškai*)

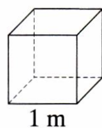
c)



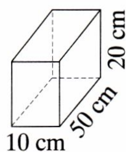
2
(*3 taškai*)

18. Skritulio ilgis lygus 2π cm. Apskaičiuokite jo:
a) spindulio ilgį (centimetrais); (*1 taškas*)
b) plotą (kvadratiniais milimetrais). (*2 taškai*)

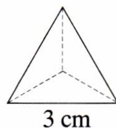
19. Apskaičiuokite pavaizduoto erdvinio kūno viso paviršiaus plotą ir tūrį:

a)


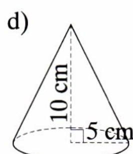
Kubas
(*2 taškai*)

b)


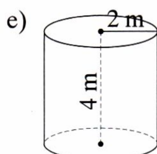
Stačiakampis gretasienis
(*2 taškai*)

c)


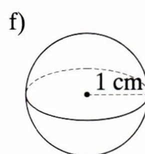
Tetraedras
(*4 taškai*)

d)


Kūgis
(*2 taškai*)

e)


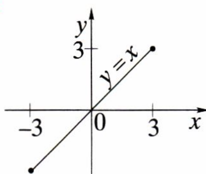
Ritinys
(*2 taškai*)

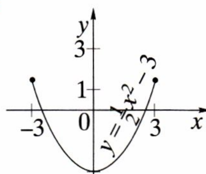
f)


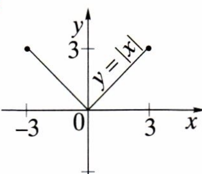
Rutulys
(*2 taškai*)

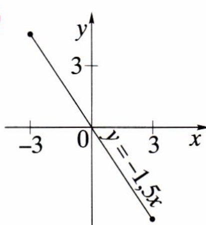
20. Nijolė per dieną suvalgo trimis saldainiais daugiau negu Antanas, bet Nijolė per dieną suvalgo 1 pyragėliu mažiau negu Antanas. Kiek saldainių per dieną suvalgo Nijolė ir kiek pyragėlių per dieną suvalgo Antanas, jeigu žinoma, kad Antanas iš viso per dieną suvalgo 6 saldumynus (saldainius ir pyragėlius), o Nijolės suvalgytų pyragėlių bei Antano suvalgytų saldainių suma lygi Nijolės suvalgytiems saldainiams? (*4 taškai*)

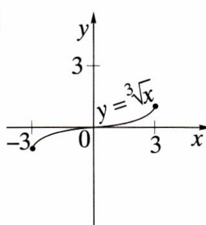
21. Brėžinyje pavaizduoti funkcijų grafikai intervale $[-3; 3]$.

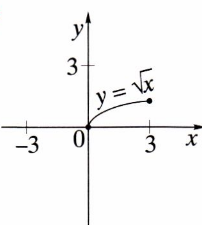












Kurios iš pavaizduotų funkcijų yra lyginės, kurios — nelyginės, kurios nėra nei lyginės nei nelyginės? (*6 taškai*)

2 užduotis

1. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1}{12} + 1{,}5$; (*1 taškas*)

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3\frac{1}{8}}$; (*2 taškai*)

c) $2^3 - (-4)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^0$. (*1 taškas*)

2. Suprastinkite:

a) $(a-3)^2 - 2(a+4)$; (*2 taškai*)

b) $2\sqrt{125} - 3\sqrt{48} + \frac{1}{2}\sqrt{180}$; (*2 taškai*)

c) $\frac{b^{14}}{b^2 \cdot b^3}$. (*2 taškai*)

3. Išspręskite lygtį $\frac{2}{1-x} = 3$. (*2 taškai*)

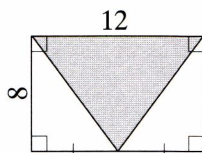
4. Parduotuvėje atpigo kai kurios prekės. Etiketėje nurodyta senoji ir naujoji palto kaina. Kiek procentų atpigo paltas? (*1 taškas*)

714 Lt !
~~840 Lt~~

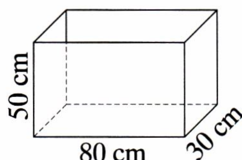
5. Apskaičiuokite lėktuvo greitį, jei žinoma, kad iš vieno miesto išskridęs 5 val. 30 min. į kitą miestą lėktuvas atskrenda 9 val. 10 min., o atstumas tarp miestų yra 4400 km. (*1 taškas*)

6. Raskite tiesių $-3x + 2y = 10$ ir $2x + y = 5$ susikirtimo taško koordinates. (*2 taškai*)

7. Apskaičiuokite nuspalvintos figūros perimetrą ir plotą. (*2 taškai*)



8. Kiek litrų vandens telpa stačiakampio gretasienio formos akvariume, kurio matmenys pateikti brėžinyje? (*1 taškas*)

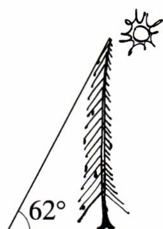


9. Metamas lošimo kauliukas ir stebima, kuo jis atvirto. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
A — atvirto 4 akutės; (*1 taškas*)
B — atvirto daugiau kaip 4 akutės; (*1 taškas*)
C — atvirto mažiau kaip 4 akutės. (*1 taškas*)

10. Iš 6 skirtingų tušinukų Jurga nori pasirinkti du. Kiek pasirinkimo galimybių ji turi? (*1 taškas*)

11. Išspręskite nelygybių sistemą $\begin{cases} 2x - 3 \geqslant x + 5, \\ -2x > -20. \end{cases}$ (*2 taškai*)

12. Medžio aukštis yra 6 m. Koks medžio šešėlio ilgis (0,01 m tikslumu), kai saulės spinduliai krenta 62° kampu? (*1 taškas*)



13. Koordinačių plokštumoje nubraižykite atkarpą AB, jei jos galų koordinatės yra $A(-5; 2)$ ir $B(3; 4)$.
a) Apskaičiuokite atkarpos AB ilgį. (*1 taškas*)
b) Apskaičiuokite atkarpos AB vidurio taško koordinates. (*1 taškas*)
c) Nubraižykite atkarpą, simetrišką atkarpai AB abscisių ašies atžvilgiu. (*1 taškas*)
d) Nubraižykite atkarpą, simetrišką atkarpai AB koordinačių pradžios taško atžvilgiu. (*1 taškas*)

14. Nubraižykite funkcijos $f(x) = x^2 - 4$ grafiką. Iš grafiko nustatykite:

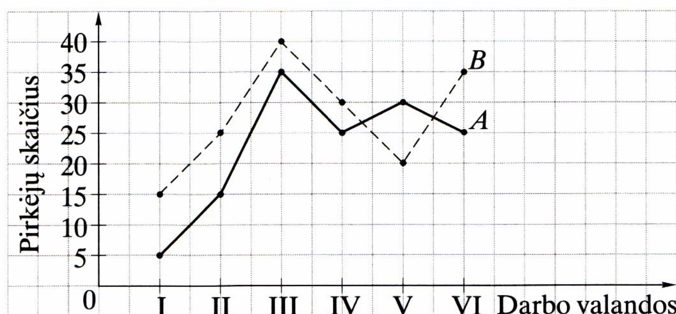
a) mažiausią funkcijos reikšmę; (*1 taškas*)

b) didėjimo ir mažėjimo intervalus; (*2 taškai*)

c) x reikšmes, su kuriomis funkcija įgyja teigiamas reikšmes; neigiamas reikšmes; (*2 taškai*)

d) grafiškai išspręskite lygtį $x^2 - 4 = 2x$. (*2 taškai*)

15. Daugiakampiai vaizduoja, kiek pirkėjų apsilankė parduotuvėse A ir B pirmą, antrą, trečią, ketvirtą, penktą ir šeštą parduotuvės darbo valandą.



a) Kiek pirkėjų apsilankė kiekvienoje parduotuvėje per 6 darbo valandas? (*2 taškai*)

b) Kiek vidutiniškai per valandą pirkėjų apsilankė parduotuvėje A? (*1 taškas*)

c) Kiek procentų visų parduotuvės B pirkėjų apsilankė joje per pirmąsias dvi darbo valandas? (*2 taškai*)

16. Nustatykite taisyklę, pagal kurią surašyti skaičiai langeliuose. Užrašykite ją žodžiais. Užpildykite tuščius langelius, jei juose turi būti skaičiai, užrašyti pagal tą pačią taisyklę. (*2 taškai*)

1	4	9	16						

3 užduotis

1. Apskaičiuokite:
   a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$; *(1 taškas)*
   b) $\frac{5 \cdot 10^5 \cdot (2 \cdot 10^{-1})^3}{24 \cdot 10^2}$. *(1 taškas)*

2. Suprastinkite: $\sqrt{98} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{8}$. *(2 taškai)*

3. Žvejybos konkurse buvo pasvertos kiekvieno žvejo sugautos žuvys ir sudaryta lentelė:

Masė x (gramais)	[0; 500]	(500; 1000]	(1000; 1500]	(1500; 2000]	(2000; 2500]
Žvejų skaičius	20	10	6	1	3

   a) Kiek žvejų dalyvavo varžybose? *(1 taškas)*
   b) Kiek žvejų sugavo daugiau kaip 1500 g žuvies? *(1 taškas)*
   c) Kiek žvejų sugavo ne daugiau kaip 1500 g žuvies? *(1 taškas)*
   d) Kiek procentų žvejų sugavo daugiau negu 1000 g, bet ne daugiau kaip 1500 g žuvies? *(2 taškai)*

4. Bilietas į kino teatrą kainuoja 12 Lt. Kino mėgėjų klubo nariams taikoma 20% nuolaida.
   1) Kiek kainuoja bilietas su 20% nuolaida? *(1 taškas)*
   2) 25 žmonių grupė atėjo į kino teatrą. Kai kurie iš jų pirko bilietus po 12 Lt, o kai kurie — su 20% nuolaida. Kiek bilietų buvo pirkta po 12 Lt ir kiek — su nuolaida, jeigu iš viso buvo sumokėta 278,4 Lt? *(3 taškai)*

5. Saulėgrąžų aliejus su statine sveria 193,2 kg. Statinės masė sudaro 5% gryno aliejaus masės. Aliejus buvo parduotas su 45% antkainiu ir gauta 1160 Lt. Kokia pradinė 1 ℓ aliejaus kaina, jeigu aliejaus tankis yra 920 kg/m^3? *(4 taškai)*

6. Automobilis 15 minučių važiavo 80 km/h greičiu, o po to 1 h 45 min — 120 km/h greičiu.
   a) Kiek kilometrų iš viso nuvažiavo automobilis? *(1 taškas)*
   b) Apskaičiuokite vidutinį automobilio greitį kelyje. *(2 taškai)*

7. Stačiakampio formos gėlynas aptvertas 20 m ilgio tvora. Pažymėję vieną gėlyno krašto ilgį x, išreikškite gėlyno plotą $S(x)$ x-o funkcija. Su kuria x reikšme gėlyno plotas yra didžiausias? *(3 taškai)*

8. Stačiojo trikampio įžambinė yra 25 cm, o vienas statinis — 20 cm ilgio. Apskaičiuokite:

a) trikampio perimetrą; (*1 taškas*)

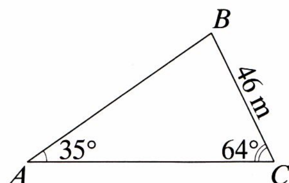
b) trikampio plotą; (*1 taškas*)

c) apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį; (*1 taškas*)

d) įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį; (*2 taškai*)

e) ilgį aukštinės, išvestos iš stačiojo kampo viršūnės. (*2 taškai*)

9. Pagal brėžinyje pateiktus duomenis apskaičiuokite atstumą AB (1 dm tikslumu). (*2 taškai*)



10. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi 10 dm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Raskite piramidės:

a) tūrį; (*2 taškai*)

b) šoninio paviršiaus plotą. (*2 taškai*)

11. Žvakė yra kūgio formos.

a) Raskite žvakės aukštį, jei jos pagrindo skersmuo lygus 10 cm, o sudaromoji — 13 cm. (*1 taškas*)

b) Apskaičiuokite žvakės tūrį (kubiniais centimetrais). (*1 taškas*)

c) Kiek tokių matmenų žvakių galima pagaminti iš $4\,\ell$ vaško ($1\,\ell = 1000\,\text{cm}^3$)? (*1 taškas*)

4 užduotis

1. Apskaičiuokite:

a) $\frac{1}{7} + 0{,}2$; (*1 taškas*)

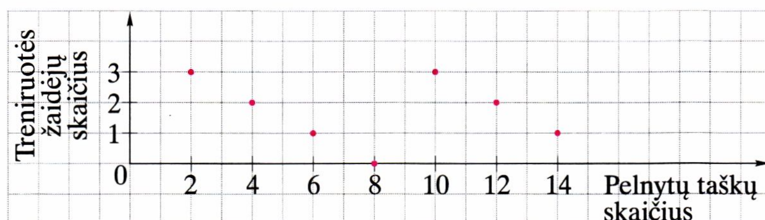
b) $-7^2 : 7$; (*1 taškas*)

c) $-\frac{3}{4} : \left(-\frac{5}{8}\right)$. (*1 taškas*)

2. Raskite skaičių, kurio 8,5% lygu 1,7. (*1 taškas*)

3. Iš skaičių 1,5; 2; −2; 0; 1; $-\frac{2}{7}$; $10\frac{1}{3}$ išrinkite natūraliuosius skaičius. (*1 taškas*)

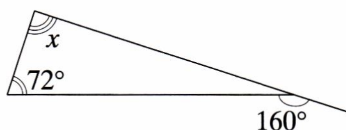
4. Žaidėjų pelnytų taškų skaičius krepšinio treniruotės metu pavaizduotas diagramoje:



a) Kiek žaidėjų treniruotės metu pelnė taškus? (*1 taškas*)

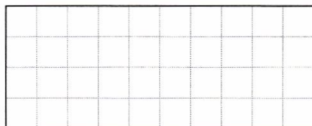
b) Kiek taškų (0,1 tikslumu) vidutiniškai pelnė vienas žaidėjas? (*2 taškai*)

5. Pagal brėžinio duomenis raskite kampo x didumą. (*2 taškai*)



6. Suprastinkite reiškinį: $3\sqrt{20} - 2\sqrt{80} + 2\sqrt{125}$. (*2 taškai*)

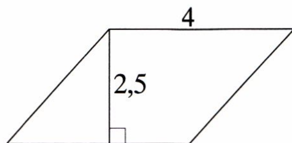
7. Nuspalvinkite 30% stačiakampio. (*1 taškas*)



8. Raskite x, jeigu $\sqrt{x} = 4$. (*1 taškas*)

9. Išspręskite lygtį $\frac{x^2-9x}{x^2-81} = 0$. (*2 taškai*)

10. Pagal brėžinio duomenis apskaičiuokite lygiagretainio plotą. (*1 taškas*)



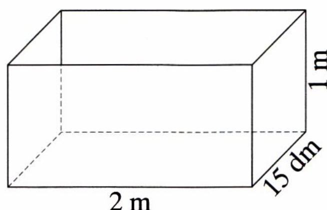
11. $5000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \ldots\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. (*1 taškas*)

12. Išspręskite nelygybę $x^2 \leqslant 9$ ir jos sprendinius pavaizduokite skaičių tiesėje. (*3 taškai*)

13. Sode auga 18 juodųjų serbentų, 12 raudonųjų serbentų ir 10 agrastų krūmų. Nubraižykite sodo vaiskrūmių skritulinę diagramą. (*1 taškas*)

14. Apskaičiuokite $4^{-2} : 2^{-6}$. (*1 taškas*)

15. Sode komposto atvira geležinė dėžė nudažyta iš vidaus ir iš išorės aliejiniais dažais. Kiek prireikė kilogramų dažų, jei 1 m^2 nudažyti buvo sunaudota 200 g dažų? (Į sienų storį neatsižvelkite.) (*3 taškai*)

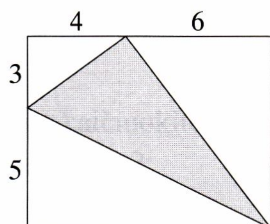


16. Mano keturi bičiuliai ir aš susidėjome pinigų tortui pirkti. Vidutiniškai kiekvienas davėm po 8 litus. Aš daviau 10 litų. Kiek litų vidutiniškai davė kiekvienas iš mano bičiulių? (*1 taškas*)

17. Motociklininkas iš Utenos į Vilnių važiavo vidutiniu 60 km/h greičiu. Iš Utenos motociklininkas išvyko 7 val. 25 min., o į Vilnių atvyko 9 val. 05 min. Dviratininkas iš Utenos į Vilnių važiavo 3 h 20 min ilgiau negu motociklininkas. Kokiu vidutiniu greičiu važiavo dviratininkas?(*3 taškai*)

18. Stačiakampio ilgis yra 8 cm, o plotis — 6 cm. Kokį kampą sudaro stačiakampio įstrižainė su ilgesniąja kraštine? Atsakymą parašykite 1° tikslumu. (*2 taškai*)

19. Remdamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite:



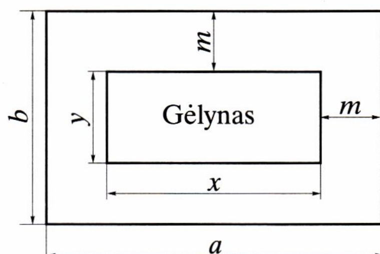
a) nuspalvintos stačiakampio dalies plotą; (*2 taškai*)

b) nuspalvinto trikampio perimetrą. (*3 taškai*)

20. Rombo įstrižainės yra 5 cm ir 12 cm ilgio. Apskaičiuokite rombo plotą ir perimetrą. (*3 taškai*)

21. Lygiašonis trikampis, kurio pagrindas yra 8 dm, o perimetras lygus 18 dm, sukamas apie simetrijos ašį. Raskite sukinio tūrį ir viso paviršiaus plotą. (*5 taškai*)

22. Kiemas yra stačiakampis, kurio ilgis lygus a, o plotis — b. Viduryje kiemo yra stačiakampis gėlynas, kurio ilgis lygus x, o plotis — y. Gėlyną iš visų pusių juosia m pločio takas.



Parašykite prieklausas:

a) m nuo b ir y; (*1 taškas*)

b) tako ploto S_1 nuo x, a ir y; (*2 taškai*)

c) gėlyno ploto S_2 nuo a, b ir m. (*2 taškai*)

23. Ridenami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma lygi 7? (*3 taškai*)

24. Prekės didmeninė kaina yra 80 Lt, o procentinis antkainis parduotuvėje sudaro 35%. Kiek pajamų turi parduotuvė, pardavusi prekę ir sumokėjusi 18% pridėtosios vertės mokestį? (*3 taškai*)

25. Ponia Petraitienė, tirdama sąnaudas vienai picai pagaminti ir parduoti, nustatė, kad vienos picos savikaina $S(x)$ centais tą dieną, kai iškepama ir parduodama x porcijų, yra $S(x) = 2x^2 - 320x + 13\,080$. Kiek reikia pagaminti ir parduoti picų per dieną, kad vienos picos savikaina būtų mažiausia? Kokia minimali picos savikaina? (*5 taškai*)

5 užduotis

1. Apskaičiuokite reiškinio $(0{,}6 \cdot 5^3 - 15)^2$ reikšmę. *(3 taškai)*

2. Raskite skaičių 105 ir 280 mažiausią bendrąjį kartotinį. *(3 taškai)*

3. Tarp skaičių $3\frac{1}{9}$ ir $3\frac{1}{8}$ parašykite kokį nors skaičių, kuris būtų didesnis už pirmąjį, bet mažesnis už antrąjį skaičių. *(2 taškai)*

4. Skaičių a ir b santykis yra $2 : 3$, o skaičių a ir c santykis lygus $1 : 2$. Koks yra skaičių b ir c santykis? *(4 taškai)*

5. Septyniolika procentų skaičiaus n yra 8,5. Raskite n procentų skaičiaus 17. *(3 taškai)*

6. Parodos lankytojo bilietas kainuoja 4 Lt. Didesnėms lankytojų grupėms dalis bilietų parduodama su 20% nuolaida. 25 mokinių grupė už bilietus sumokėjo 88 Lt. Kiek bilietų buvo parduota su nuolaida ir kiek — už visą kainą? *(4 taškai)*

7. Automobilis $\frac{3}{5}$ kelio važiavo 60 km/h greičiu, o likusią kelio dalį 20 km/h greičiau. Raskite automobilio vidutinį greitį. *(4 taškai)*

8. Kas daugiau: $\sqrt{27}$ ar $\sqrt{20} + \sqrt{7}$? *(3 taškai)*

9. Suprastinkite reiškinį $\sqrt{9 - 6a + a^2}$, jei žinoma, kad $a > 3$. *(2 taškai)*

10. Suprastinkite reiškinį $(3x - 5)^2 - (3x - 5)(x + 2)$ ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $x = \sqrt{2}$. *(4 taškai)*

11. Su kuria kintamojo a reikšme trupmenos $\frac{a^2-16}{a+4}$ reikšmė lygi nuliui? *(3 taškai)*

12. Įrodykite, kad reiškinys $-y^2 + 2y - 5$ su visomis y reikšmėmis įgyja neigiamą reikšmę. *(3 taškai)*

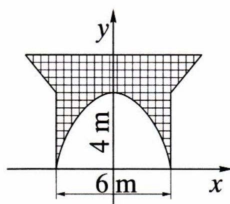
13. a) Ar priklauso funkcijos $f(x) = 4x - 4$ grafikui taškas $M(-13; -56)$? *(1 taškas)*

b) Nurodykite funkcijos $f(x) = 4x - 4$ grafiko tašką, kurio abscisė lygi ordinatei. *(2 taškai)*

c) Nubraižykite funkcijos $f(x) = 4x - 4$ grafiką. *(1 taškas)*

14. Trikampio viršūnės yra taškuose $M(-1; -16)$, $N(11; 0)$ ir $K(-1; 9)$. Įrodykite, kad šis trikampis yra status. (*4 taškai*)

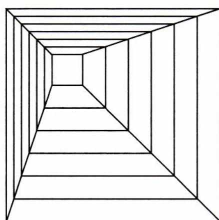
15. Vartų arka yra parabolės formos. Arkos plotis prie žemės yra 6 m, o didžiausias aukštis — 4 m.



a) Įrodykite, kad parabolės lygtis yra $y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$. (*4 taškai*)
b) Raskite arkos plotį 3 metrų aukštyje nuo žemės. (*3 taškai*)
c) Ar gali pro šiuos vartus įvažiuoti 4 m pločio ir 2 m aukščio furgonas? (*3 taškai*)

16. Klasėje yra 13 berniukų ir 12 mergaičių. Atsakinėti pakviesti du mokiniai. Kokia tikimybė, kad pakviesti yra berniukas ir mergaitė? (*3 taškai*)

17. Kvadrato viduje nubraižytas kitas kvadratas, o jų viršūnės sujungtos atkarpomis taip, kaip parodyta brėžinyje. Kvadratų kraštinės yra atitinkamai lygiagrečios. Įrodykite, kad vertikaliai užbrūkšniuotų keturkampių ir horizontaliai užbrūkšniuotų keturkampių plotų sumos yra lygios.



(*8 taškai*)

18. Kurios iš funkcijų $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 2x+5$, $f(x) = -x^3$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 6 - 3x$ yra didėjančios? (*3 taškai*)

Skyrelio „Pasitikrinkite“ uždavinių atsakymai

3. a) AD, A_1D_1, B_1C_1; b) ABC, ADD_1, B_1BC, $B_1A_1D_1$, AA_1C, BB_1D; c) ABC ir $A_1B_1C_1$, DCC_1 ir ABB_1, ADD_1 ir BCC_1; d) DCC_1, BCC_1, BB_1D_1; e) DCC_1 ir BCC_1, BB_1D_1 ir DCC_1, BB_1D ir BCC_1.

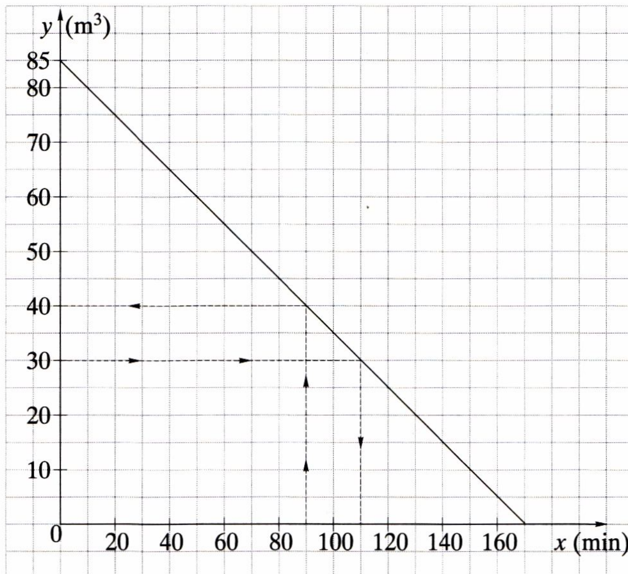
6. Lygiašonė trapecija. **8.** Taip. **12.** b) $S = a^2\sqrt{2}$; 45°.

13. a) 9,6 dm, 29,6 dm; b) 16 cm, 20 cm. **14.** a) 62 cm^3; b) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ dm^3.

15. $443\frac{1}{3}$ cm^3. **16.** a) 108 cm^2; b) 3962 cm^3. **17.** $5\sqrt{219}$ cm^2. **18.** $\approx 14{,}3\ \ell$.

19. 793π cm^3, 208π cm^2. **20.** 1) $\approx 94{,}2$ cm^3; 2) $\approx 162{,}8$ cm^3, $\approx 68{,}6$ cm^3.

21. a) ≈ 88 m^3, t. y. 88 t; b) 1) 65 t, 25 t, $(85 - 30t)$ t;
2)



3) per 1 h 50 min; 4) 40 t.

22. a) $(-\infty; 1]$, $(2; +\infty)$; b) $[-3{,}5; -3)$; c) $(-\infty; 2]$, $(3; 4]$, $(5; +\infty)$; d) $(-2; 2]$, $(5; 7]$. **23.** a) 68°, 112°, 68°, 112°; b) 58°, 122°, 58°, 122°.

24. a) 0; b) $-\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, 0, $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; c) $x \leqslant 0$, $x \geqslant 4$; d) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$.

25. a) -4 ir 0 arba 5 ir 9; b) -4 ir -7 arba 5 ir 2.

26. Naudingesnė paprastųjų palūkanų paskola.

27. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{7}{8}$. **28** a) 5, $C(0; 3{,}5)$; b) 10, $C(2; -1)$.

29. a) $\frac{2}{x-y}$; b) $\frac{x}{2}$; c) 4; d) 0,5. **30** a) -1; b) 3.

ISBN 9955–491–09–4 (2 dalis)
ISBN 9955–491–05–1 (2 dalys)

